פתרון תרגיל 4 אנליזה הרמונית תש"ף

25 בנובמבר 2019

1. בשנה שעברה התעצלתי לרשום את כל חישובי האינטגרלים. עקביות היא דבר חשוב.

(א) הפונקציה $f\left(x\right)=x^{2}$ היא זוגית, ולכן $b_{n}=0$. נחשב את שאר המקדמים:

$$a_{0}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}x^{2}dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^{3}}{3}=\frac{2\pi^{2}}{3}$$

$$a_{n}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}x^{2}\cos nxdx=$$

כאן צריך לעשות אינטגרציה בחלקים, פעמיים. בסופו של דבר, מקבלים:

$$a_{n}=\frac{4\left(-1\right)^{n}}{n^{2}}$$

סה"כ:

$$x^{2}\sim\frac{\pi^{2}}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(-1\right)^{n}}{n^{2}}\cos nx$$

(ב) לפי הזהות: $\cos^{2}x=\frac{\cos2x+1}{2}$, נקבל:

$$f\left(x\right)=\frac{\cos2x+1}{2}-2\cos x+1=\frac{3}{2}-2\cos x+\frac{1}{2}\cos2x$$

וזהו טור פורייה של f.

(ג) הפונקציה שלנו שונה מהפונקציה $g\left(x\right)=\left|\sin x\right|$ במספר סופי של נקודות, ולכן יש להן את אותו טור פורייה.

הפונקציה $\left|\sin x\right|$ זוגית, ולכן $b_{n}=0$. נחשב את שאר המקדמים:

$$a_{0}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left|\sin x\right|dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin xdx=\frac{4}{\pi}$$

בגבולות האינטגרל, יעני בתחום בין 0 לבין π, $0 \leq \sin x$ ולכן $|\sin x| = \sin x$.
כמו כן:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin x \cos nx dx =$$

כאן, נשתמש בזהות: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$, ונקבל:

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \left(\sin\left(\left(n+1\right)x\right) + \sin\left(\left(1-n\right)x\right)\right) dx =$$

וזהו אינטגרל שאנו יודעים לחשב; נקבל בסופו של דבר:

$$a_n = \frac{2\left(1+\left(-1\right)^n\right)}{\pi\left(1-n^2\right)}$$

נשים לב שזה תקף כאשר $n \neq 1$; אם נדייק, כאשר $a_{2k-1} = 0$, ועבור אינדקסים זוגיים:

$$a_{2k} = \frac{4}{\pi\left(1-4k^2\right)}$$

עבור $n = 1$, נקבל:

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin 2x dx = 0$$

סה"כ:

$$f\left(x\right) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi\left(1-4k^2\right)} \cos 2kx$$

2. לפי זהות של זווית כפולה:

$$\sin^4 nx = \left(\sin^2 nx\right)^2 = \left(\frac{1-\cos 2nx}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2nx + \cos^2 2nx\right)$$

ושוב, עם זווית כפולה:

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2nx + \frac{1+\cos 4nx}{2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2nx + \frac{1}{8}\cos 4nx$$

ולכן:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right) \sin^4 nx dx =$$

$$= \frac{3}{8} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2nx dx + \frac{1}{8} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 4nx dx$$

מכיוון ש:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

נקבל:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin^4 nx dx = \frac{3\pi}{8} a_0 - \frac{\pi}{2} a_{2n} + \frac{\pi}{8} a_{4n}$$