תרגיל 9

15 במאי 2018

פתרו את המד"רים הבאים:

1. $x^2y'' = (y')^2$

פתרון:

זאת משוואה חסרה מהסוג הראשון.

נציב $z = y'$. אז $z' = y''$. קיבלנו את המשוואה:

$x^2z' = z^2$. זאת משוואה פרידה.

פתרון סינגולרי: $z = 0$. כלומר, $y = c$.

כעת נפריד משתנים:

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}.$$

נעשה אינטרגל, ונקבל:

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + c_1.$$

כלומר, $x = z - c_1xz$

$$z = \frac{x}{1 - c_1x}.$$

$z = y'$

ולכן $y' = \dfrac{x}{1 - c_1x}$

נקבל: $y = -\dfrac{1}{c_1}[x + \dfrac{1}{c_1}\ln|1 - c_1x| + c_2]$

2. $y \cdot y'' - (y')^3 = 0$

פתרון:

זאת מד"ר חסרה מסוג שני.

נציב $z = y'$

ולכן: $z\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{dz}{dx} = y''$

נציב בחזרה במשוואה:

$$yz\frac{dz}{dy} - z^3 = 0.$$

פתרון סינגולרי: $z=0$, כלומר, $y=c$.

כעת, נחלק ב-z:

$$\frac{dz}{dy}y=z^2 \ .$$

זאת משוואה פרידה.

$$\frac{dz}{z^2}=\frac{dy}{y}$$

$$\int\frac{dz}{z^2}=\int\frac{dy}{y}$$

$$-\frac{1}{z}=\ln c_1 y$$

$$z=-\frac{1}{\ln c_1 y}.$$

נציב בחזרה: $z=y'$

$$y'=-\frac{1}{\ln(c_1 y)}$$

זאת מד"ר פרידה.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\ln(c_1 y)}$$

$$\ln(c_1 y)dy=-dx$$

$$\int\ln(c_1 y)dy=\int -dx$$

$$y\ln(c_1 y)-y=-x+c_2 \ .$$

נשאיר את הפתרון בצורה סתומה.

3. $y'(1+y'^2)=y''$

פתרון:

זאת משוואה חסרה מסוג שני.

נציב $z=y'$

$$y''=\frac{dz}{dx}=z\frac{dz}{dy}$$

$$z(1+z^2)=z\frac{dz}{dy}$$

ראשית, יש פתרון סינגולרי $z=0$, כלומר, $y=c$.

כעת,

$$(1+z^2)=\frac{dz}{dy}$$

$$dy=\frac{dz}{1+z^2}$$

$$\int dy=\int\frac{dz}{1+z^2}$$

$y + c_1 = \arctan(z)$

כלומר, $z = \tan(y + c_1)$

$y' = \tan(y + c_1)$

ושוב נפתור ע"י הפרדת משתנים:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(y + c_1)$$

$$dx = dy\frac{\cos(y + c_1)}{\sin(y + c_1)}$$

נפעיל אינטגרל בשני הצדדים ונקבל:

$x + c_2 = \ln\sin(y + c_1)$

לסיכום, $y = \arcsin(e^{x+c_2}) - c_1$