

$$A=B \text{ לא נכון כש-} \begin{cases} 1. \text{ הוכיחו או הפריכו:} \\ \text{א) אם } R(A,B;C,D) = R(A,B;C,D') \text{ אז } D=D' \\ \text{ד) אם } R(A,B;C,D)=1 \text{ אז } C=D \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{ב) אם } R(A,B;C,D) = R(A,B';C',D) \text{ אז } B=B', C=C' \\ \text{ג) אם } R(A,B;C,D) = R(A,B';C',D) \text{ אז } AB'/AC' = AB/AC \end{cases}$$

לא נכון. למשל:
 $A=1, B=3, C=2, D=4, B'=2, C'=4/3$

ה) אם $R(A,B;C,D) = R(B,A;C,D)$ אז $A=B$ או $C=D$. לא נכון. למשל כשהנקודות הרמוניות

2. א) נסתכל על הספרה ב- R^3 , ז"א על קבוצת הנקודות:

$$S^2 = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$$

נגדיר יחס שקילות על S^2 :

$$(x,y,z) \sim (x',y',z') \Leftrightarrow (-x,-y,-z) = (x',y',z')$$

הוכיחו שיש מיפוי חח"ע ועל בין הנקודות ב- RP^2 לבין הנקודות במרחב המנה S^2/\sim .
 (למעשה מיפוי זה הוא הומיאומורפיזם).

נקודה $(x:y:z)$ ב- RP^2 היא ישר L ב- R^3 העובר דרך הראשית.

נגדיר את המיפוי $f: RP^2 \rightarrow S^2/\sim$ על ידי $f(L) = L \cap S^2$.

יש שתי נקודות בחיתוך זה, אבל שתיהן באותה מחלקה ולכן המיפוי מוגדר היטב.
 צ"ל חח"ע ועל.

חח"ע: אם $f(L) = (a,b,c) = (e,d,f) = f(M)$ הן שתי מחלקות שקילות שוות ב- S^2/\sim אז $(a,b,c) = \pm(e,d,f)$ ולכן הישרים M, L (העוברים דרך הראשית ודרך אחת מהנקודות) מתלכדים.

על: למחלקה $\pm(a,b,c)$ (כנקודה ב- S^2/\sim) נתאים את הנקודה $(a:b:c)$ ב- RP^2 .

(שימו לב: אם מתעקשים לעשות התרגיל בקואורדינטות, אז f מוגדר כך:

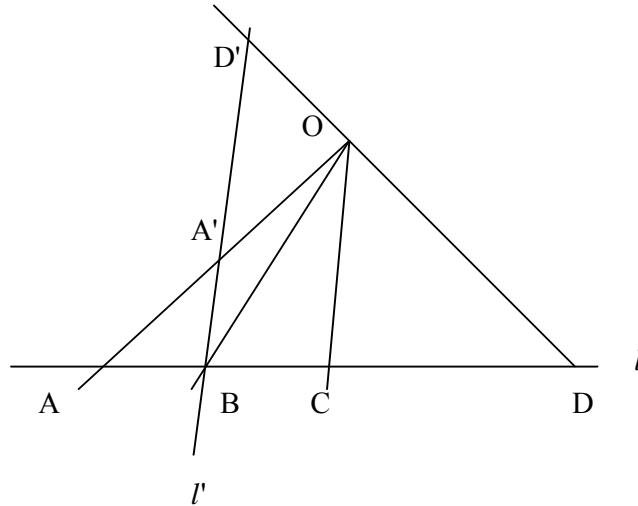
$$f((x:y:z)) = \frac{\pm 1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$$

ב) הכלילו את סעיף א) עבור המישור הפרויקטיבי ה- n מימדי: RP^n (ז"א – נסחו טענה מתאימה והוכיחו אותה).

מכיוון ש-נקודה ב- RP^n היא ישר L ב- R^{n+1} העובר דרך הראשית, ניתן להגדיר את המיפוי $RP^n \rightarrow S^n/\sim$ באותו אופן.

3. תהיינה A, B, C, D ארבע נקודות על ישר l , O נקודה שאינה על הישר. נעביר דרך B ישר המקביל ל- OC ותהיינה A', D' נקודות החיתוך של הישר עם OA, OD . הוכיחו ש- $R(B, C; A, D) = A'B/D'B$. רק על פי העובדה שפרספקטיבה שומרת על יחס כפול.

נקרא לישר המקביל ל- OC : l'



כעת, בנוסף ל- A', D' נגדיר $B'=B$ ו- C' חיתוך בין l' ל- OC (אשר מתרחש באינסוף).

$$\left. \begin{array}{l} A' = l' \cap OA \\ B' = l' \cap OB \\ C' = l' \cap OC \\ D' = l' \cap OD \end{array} \right\} \text{ כלומר: } \text{כעת, גם הן וגם } A, B, C, D \text{ בפרספקטיבה מ } O.$$

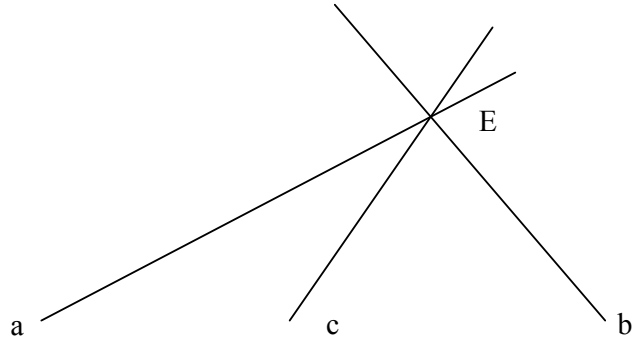
נשים לב כי היותו C' נמצאת באינסוף מרחקה ל- A' ול- D' זהה ולכן:

$$R(B, C; A, D) = R(B, C'; A', D') = \frac{BA'}{C'A'} \frac{C'D'}{BD'} = \frac{BA'}{BD'}$$

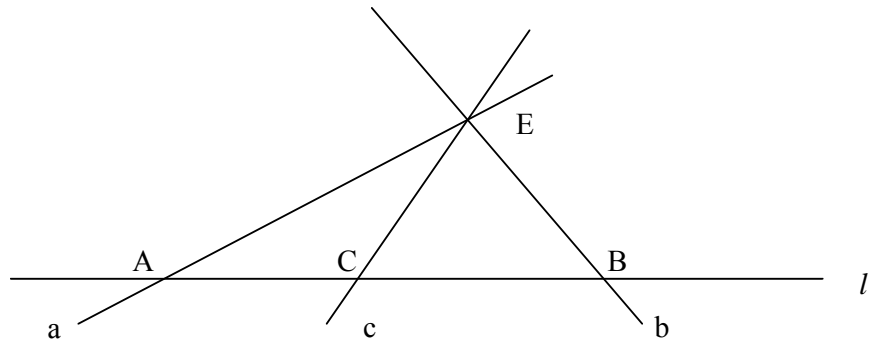
4. תהיינה A, B, C שלוש נקודות על ישר l ונקודה P שאינה על l . בשיעור ראיתם את הבניה הגיאומטרית של נקודה D על l כך שהרביעייה A, B, C, D היא הרמונית. תארו (וציירו) בניה דואלית של הנ"ל: התחילו עם שלישיית ישרים a, b, c קונקורנטיים בנקודה L ובנו ישר d שעובר דרך L כך שרביעייה a, b, c, d הרמונית (כלומר היחס בין נק' החיתוך של ישרים אלו עם כל ישר הרמוני). הוכיחו שאכן הרביעייה הרמונית.

פתרון:

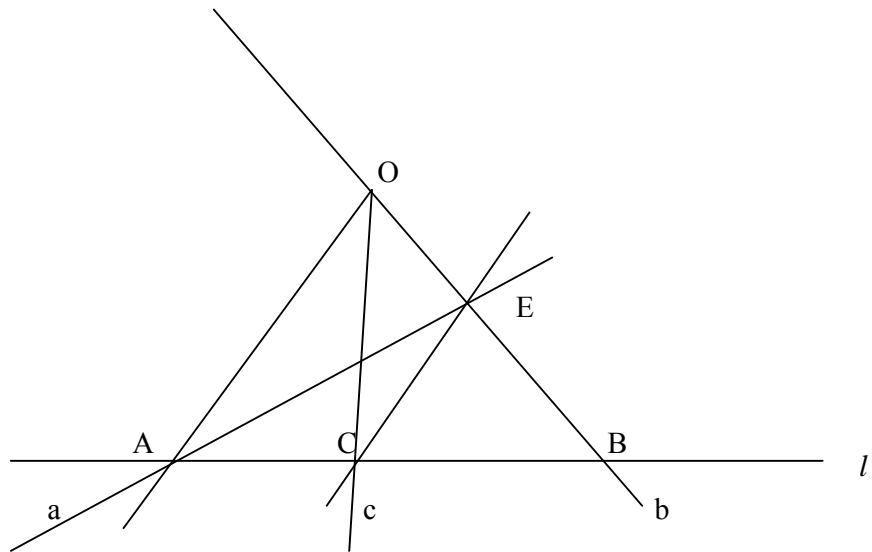
נתבונן ב-3 ישרים קונקורנטיים לנקודה E : a, b, c



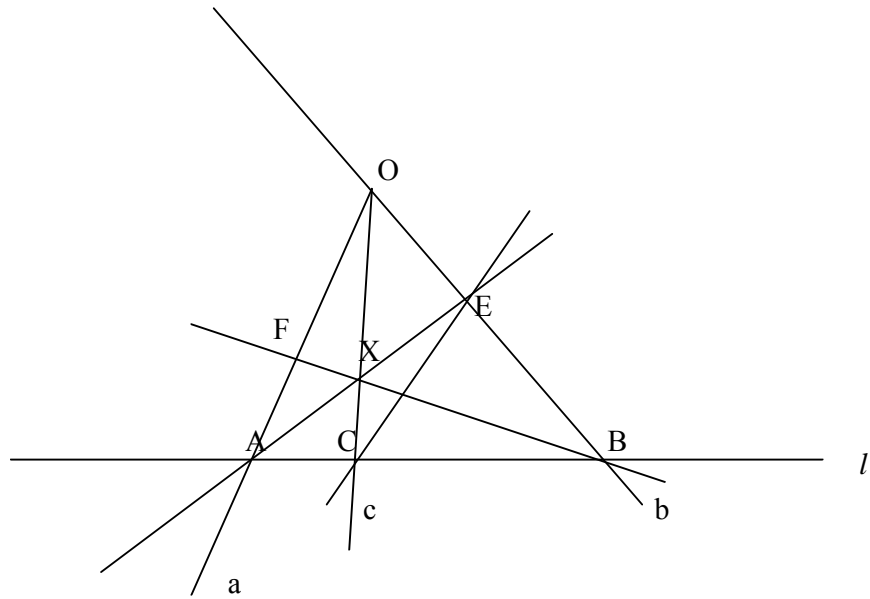
נעביר ישר שאיננו קונקורנטי להם- l וניתן שם לחיתוכים בהתאמה:



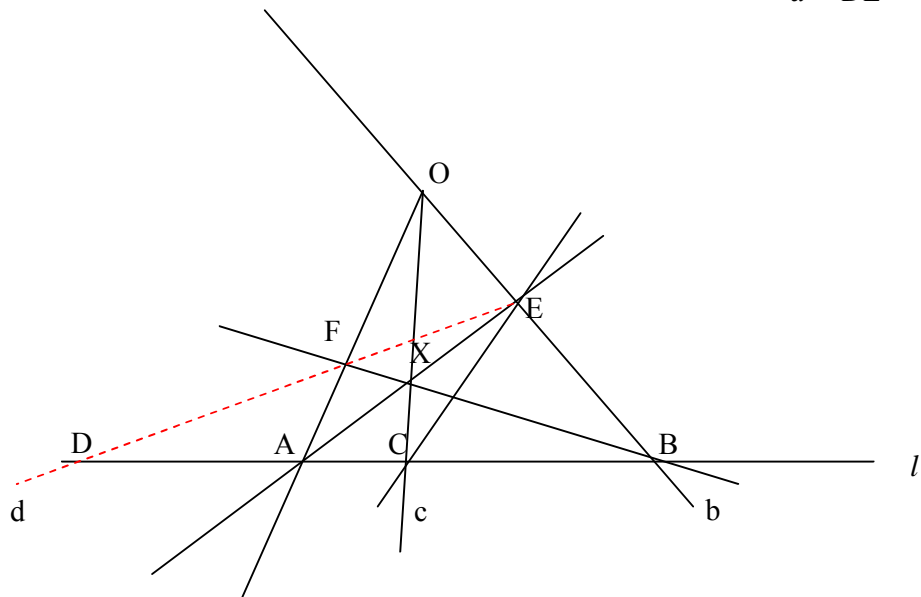
נבחר נקודה O על המשכה של b' ונעביר CO, AO :



נגדיר $CO \cap AE = X$, נעביר BX ונגדיר $BX \cap AO = F$



לבסוף נגדיר :
 $D = EF \cap l$,
 $d = DE$



הנקודות A,B,C,D הרמוניות כפי שהוכח בכיתה ולכן הישרים a,b,c,d הרמוניים.