

בחינה סופית בחשבון אינפיניטסימלי 3 — 88-230-05

מועד א' תשע"ט

מרצה: ד"ר שמעון ברוקס

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: מחשבון

ענו על 4 מתוך 5 השאלות. כל שאלה 25 נקודות. סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים, הסבירו את הדרך, והקיפו תשובות סופיות.

1. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב- \mathbb{R}^n . הוכח/הפרך:

(א) אם הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לווקטור $x \in \mathbb{R}^n$, אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$

(ב) אם $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב- \mathbb{R} , אזי הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב- \mathbb{R}^n .

(ג) אם $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב- \mathbb{R} , אזי קיימת תת-סדרה של $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ב- \mathbb{R}^n .

2. תהי הפונקציה $f(x, y) = xe^y - ye^x$. לכל אחת מהנקודות הבאות, מצאו כיוון אחד בו הנגזרת חיובית, כיוון אחד בו הנגזרת שלילית, וכיוון אחד בו הנגזרת מתאפסת—או הוכיחו שלא קיים כיוון כזה:

(א) ראשית הצירים $(0, 0)$

(ב) הנקודה $(1, 0)$

(ג) הנקודה $(0, -1)$

3. תהי $f(x)$ פונקציה (של משתנה אחד) גזירה פעמיים ברציפות. נגדיר פונקציה של שני משתנים

$$g(x, y) = f(x) + \frac{1}{2}y^2$$

(א) הראה שכל נקודה קריטית של g ב- \mathbb{R}^2 היא מהצורה $(x_0, 0)$ כאשר x_0 היא נקודה קריטית של f ב- \mathbb{R} .

(ב) מייך את הנקודות הקריטיות של g ב- \mathbb{R}^2 בשני המקרים הבאים:

i. כאשר הנקודה הקריטית המקבילה של f היא מקסימום מקומי

ii. כאשר הנקודה הקריטית המקבילה של f היא מינימום מקומי

4. תהי $g(x, y)$ פונקציה גזירה ברציפות, כך שהעקומה

$$C = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$$

גזירה ברציפות ולא מכילה את ראשית הצירים (כלומר, $g(0, 0) \neq 0$). הוכח שקיימת נקודה $(x_0, y_0) \in C$ בעלת מרחק מינימלי מראשית הצירים, ושהקו המחבר בין (x_0, y_0) לבין ראשית הצירים, מאונכת ל- C בנקודה (x_0, y_0) .

5. חשבו את האינטגרל הכפול

$$\iint_D xy^2 dx dy$$

כאשר D הוא המשולש המוגבל בין שלושת הקווים $x = y$, $y = 0$, $x = 1$.

בהצלחה רבה!