נכתב על ידי יהונתן רגב

# האינטגרל הלא מסוים

## תיקון לשיעור הקודם

בהגדרת הפונקציה הקדומה, ובמשפטים שאחר כך, התחום בו עובדים צריך להיות מהצורה $(a,b)$, או $[a,b)$, או $(a,b]$, או $[a,b]$, או $(a,\infty)$, או $[a,\infty)$, או $(-\infty,a)$, או $(-\infty,a]$, או $(-\infty,\infty)$.

## אינטגרלים לא מסוימים בסיסיים

$$\int 0\,dx = c$$

$$\alpha \neq -1 \quad , \quad \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\alpha = -1 \quad , \quad \int \frac{dx}{x} = \log|x| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctanx + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -arcctan + c$$

**הוכחה**

בכל הנ״ל, בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1, ראינו שהנגזרת של הפונקציה של אגף ימין שווה לפונקציה בתוך האינטגרל.

■

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c}$$

**הוכחה**

עבור $0 < x$:

$$(\log|x|)' = (\log x)' = \frac{1}{x}$$

עבור $0 > x$:

$$(\log|x|)' = (\log -x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

■

$$\boxed{\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + c}$$

**הוכחה**

$$(a^x)' = a^x \cdot \log a$$

$$a^x = \frac{(a^x)'}{\log a}$$

■

**הערה**

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \quad , \quad \int e^{x^2} \, dx$$

האינטגרלים הנ״ל קיימים, אך אינם פונקציות אלמנטריות (פונקציות המתקבלות מהפונקציות המוכרות). נוכיח כי

## שיטות אינטגרציה

### 1. שיטת הפירוק (לינאריות)

שיטת אינטגרציה לפיה נעזרים בתכונת הלינאריות של האינטגרל הלא מסוים.

**דוגמה**

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \overset{1=\sin^2 x+\cos^2 x}{\cong} \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \tan x - ctanx + c$$

דרך אחרת:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \overset{2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin 2\cdot x}{\cong} \int \frac{4}{(2\cdot\sin x\cdot\cos x)^2} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 4\cdot\int \frac{1}{(\sin^2 2\cdot x)^2} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \overset{\left(-ctan(2\cdot x)\right)'=\frac{2}{\sin^2 2\cdot x}}{\cong} 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-ctan(2\cdot x)\right) + c$$

לכן, בהכרח, ההפרש בין הפונקציות הקדומות שמצאנו, קבוע:

$$-2\cdot ctan(2\cdot x) - (\tan x - ctanx) = constant$$

ואכן:

$$-2\cdot ctan(2\cdot x) = -2\cdot\frac{\cos(2\cdot x)}{\sin 2\cdot x} = -\frac{2\cdot(\cos^2 x - \sin^2 x)}{2\cdot\sin x\cdot\cos x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}$$

$$\tan x - ctanx = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}$$

$$-2\cdot ctan(2\cdot x) - (\tan x - ctanx) = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x} - \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x} = 0$$

$\blacksquare$

### 2. אינטגרציה בחלקים

יהיו $u = u(x)\ ,\ v = v(x)$ פונקציות גזירות.

אזי (ראה סימון):

נכתב על ידי יהונתן רגב

$$\boxed{\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du}$$

**הוכחה**

$$\int u\,dv + \int v\,du = \int u\cdot v'dx + \int vu'dx$$

$$\int u\,dv + \int v\,du = \int (u\cdot v' + v\cdot u')\,dx$$

$$\int u\,dv + \int v\,du = \int (u\cdot v)'\,dx$$

$$\int u\,dv + \int v\,du = uv + c$$

לכן:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + c$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

■

**הערה**

בתור $u$ נבחר את הפונקציה שנרצה שתיגזר.

**דוגמה**

$$\boxed{\int \log x\,dx}$$

$$u \coloneqq \log x \;\Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv \coloneqq dx \;\Longrightarrow v = x$$

$$\Downarrow$$

$$\int \log x\;dx = (\log x)\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\cdot\log x - x + c = x\cdot(\log x - 1) + c$$

■

**דוגמה**

$$\boxed{\int x^2\cdot\cos x\,dx}$$

$$u \coloneqq x^2 \;\Longrightarrow du = 2\cdot xdx$$

$$dv \coloneqq \cos x\,dx \;\Longrightarrow v = \sin x$$

$$\Downarrow$$

$$\int x^2 \cdot \cos x \, dx = x^2 \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2 \cdot x dx = x^2 \cdot \sin x - 2 \cdot \int x \cdot \sin x \, dx$$

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

$$u \coloneqq x \implies du = dx$$

$$dv \coloneqq \sin x \, dx \implies v = -\cos x$$

$$\Downarrow$$

$$\int x \cdot \sin x \, dx = x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + c$$

$$\Downarrow$$

$$\int x^2 \cdot \cos x \, dx = x^2 \cdot \sin x - 2 \cdot (-x \cdot \cos x + \sin x) + c$$

■

**דוגמה**

$$\boxed{\int e^x \cdot \sin x \, dx}$$

$$u \coloneqq \sin x \implies du = \cos x \, dx$$

$$dv \coloneqq e^x dx \implies v = e^x$$

$$\Downarrow$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \sin x \cdot e^x - \int e^x \cdot \cos x \, dx$$

$$u \coloneqq \cos x \implies du = -\sin x \, dx$$

$$dv \coloneqq e^x dx \implies v = e^x$$

$$\Downarrow$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \sin x \cdot e^x - \left(e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot (-\sin x) \, dx\right)$$

$$\Downarrow$$

$$2 \cdot \int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \cdot (\sin x - \cos x) + c$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sin x - \cos x) + c$$

■

3. <u>**הצבה**</u>

יהיו $g$ קדומה ל – $f$ בקטע מוכלל $I$, $J$ קטע מוכלל ו - $t: J \to I$ גזירה. אזי:

$$\boxed{\int f(t)\,dt = \int f(t)\cdot t'\,dx = g(t)+c}$$

**הערה**

$$f(t)=f\big(t(x)\big)\quad,\quad t'=t'(x)\quad,\quad g(t)=g\big(t(x)\big)$$

**הוכחה**

עפ"י כלל השרשרת:

$$\big(g(t)\big)'=g'(t)\cdot t'=f(t)\cdot t'$$

■

**דוגמה**

$$\boxed{\int e^{\cos x}\cdot \sin x\;dx}$$

$$t\coloneqq \cos x \Longrightarrow dt=-\sin x\;dx$$

$$\int e^{\cos x}\cdot\sin x\;dx=-\int e^t\,dt=-e^t+c=-e^{\cos x}+c$$

■

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx}$$

נשתמש בשיטה בכיוון ההפוך:

$$t\coloneqq\sqrt{x}\;\Longrightarrow x=t^2\Longrightarrow dx=2\cdot t\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx=\int\frac{t}{t^2+1}2\cdot t\,dt$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx=2\cdot\int\frac{t^2}{t^2+1}dt$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx=2\cdot\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx=2\cdot\left(\int\frac{t^2+1}{t^2+1}\,dt-\int\frac{1}{t^2+1}\,dt\right)$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx=2\cdot\left(\int dt-\int\frac{dt}{t^2+1}\right)$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx=2\cdot(t-\arctan t)+c=2\cdot\left(\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x}\right)+c$$

■

4. <u>**הצבה טריגונומטרית**</u>

**דוגמה**

$$\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad , \quad 0 < a}$$

נשתמש בשיטה בכיוון ההפוך:

$$x \coloneqq a \cdot \sin t \implies dx = a \cdot \cos t \, dt$$

<u>הערה</u>: נחשב את האינטגרל בקטע בו $0 \le \cos t$.

$$\Downarrow$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \cdot \sin^2 t} \cdot a \cdot \cos t \;\, dt$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 t)} \cdot a \cdot \cos t \;\, dt$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 \cos^2 t} \cdot a \cdot \cos t \;\, dt$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a^2 \cdot \cos^2 t \;\, dt$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \cdot \int \cos^2 t \;\, dt$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \cdot \int \frac{\cos 2 \cdot t + 1}{2} \;\, dt$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \cdot \left( \int \cos 2 \cdot t \;\, dt + \int dt \right)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \cdot \left( \frac{\sin 2 \cdot t}{2} + t \right) + c$$

$$x = a \cdot \sin t \implies t = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin 2 \cdot t = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t = s \cdot \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \cdot \left( 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \arcsin \frac{x}{a} \right) + c$$

$$\blacksquare$$

<u>**שיטות אינטגרציה נוספות**</u>

**דוגמה**

$$\boxed{\int \tan x \ dx}$$

$$\int \tan x \ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -\frac{1}{\cos x} d(\cos x) = -\log|\cos x| + c$$

■

**דוגמה**

$$\boxed{\int \operatorname{c}\tan x \ dx}$$

באופן דומה:

$$\int \operatorname{c}\tan x \ dx = \log|\sin x| + c$$

■

**דוגמה**

$$\boxed{\int \frac{1}{\sin x} dx}$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{dx}{2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} dx = \int \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\tan\frac{x}{2}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} d\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

■