פתרון תרגיל 1 אינפי 1 תיכוניסטים תש"ף

3 בנובמבר 2019

1. נפריד ונוכיח לפי הצורך.

(א) הפרכה. נתבונן בקבוצה $A = (-1,0) \cup (0,1)$, ולכן $A^{-1} = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$. כאן, $m = -1$ אך A^{-1} לא חסומה מלמעלה.

(ב) הוכחה. יהי $x \in A + B$. מהגדרת הקבוצה קיימים $a \in A, b \in B$ עבורם: $x = a + b$. חסם עליון הוא חסם מלמעלה ולכן: $a \leq \sup A, b \leq \sup B$.
מכאן, $x \leq \sup A + \sup B$.
זה נכון לכל $x \in A + B$ ולכן $\sup A + \sup B$ חסם מלמעלה של $A + B$. מפה לשם, $\sup (A+B) \leq \sup A + \sup B$.
כעת, נניח בשלילה ש: $\sup (A+B) < \sup A + \sup B$. נסמן:

$$\varepsilon = \frac{-\sup (A+B) + \sup A + \sup B}{2}$$

לפי ההגדרה של חסם עליון, קיימים $a \in A, b \in B$ עבורם: $\sup A - \varepsilon < a, \sup B - \varepsilon < b$. נקבל:

$$a + b > \sup A + \sup B - 2\varepsilon = \sup (A+B)$$

ומצאנו איבר בקבוצה $A+B$ שגדול יותר מ־$\sup (A+B)$, בום סתירה. סה"כ, $\sup (A+B) = \sup A + \sup B$, כ נ ד ר ש.

(ג) הפרכה. נתבונן בקבוצות $A = B = (-1,0)$. $\sup A = \sup B = 0$ ולכן $\sup A \cdot \sup B = 0$. מצד שני, $AB = (0,1)$ ולכן $\sup AB = 1$.

2. נרשום איברים ראשונים בשביל לקבל אינטואיציה:

$$\left\{7, -5, 4\frac{1}{3}, -4, 3\frac{4}{5}, -3\frac{4}{6}, 3\frac{4}{7}, \ldots\right\}$$

לא צריך אפסילונים ובלאגנים, די קל לראות ש־7 הוא המקסימום, -5 הוא המינימום. נוכיח זאת.

ראשית:

$$7 = 3 + 4 \geq 3 + \frac{4}{n} \geq (-1)^{n-5}\left(3 + \frac{4}{n}\right)$$

האי־שוויון הראשון נובע מכך ש־n טבעי ובפרט $1 \leq n$, האי־שוויון השני נובע מכך ש: $\left|(-1)^{n-5}\left(3+\frac{4}{n}\right)\right| = 3 + \frac{4}{n}$, אבל אלו דברים שאין צורך להסביר. מכאן, 7 חסם מלמעלה. בנוסף, 7 שייך לקבוצה ולכן הוא המקסימום.

שנית, עבור n אי־זוגי, האיבר $(-1)^{n-5}\left(3+\frac{4}{n}\right)$ חיובי ולכן $-5 \leq (-1)^{n-5}\left(3+\frac{4}{n}\right)$.

עבור n זוגי, $2 \leq n$ ולכן: $\frac{4}{n} \leq 2$. נקבל: $3+\frac{4}{n} \leq 5$ ולכן: $-5 \leq (-1)^{n-5}\left(3+\frac{4}{n}\right)$.

סה"כ, -5 קטן מכל איברי הקבוצה ולכן חסם מלמטה. לקינוח, -5 שייך לקבוצה ולכן הוא המינימום.