תירגול 8, 30.12.2010, השלמה:

המרחב הניצב: יהי V ממ"פ ותהי $S \subseteq V$. יהי $v \in V$, אם v אורתוגונלי לכל אייברי S נסמן $v \perp S$
ונגדיר: $S^{\perp} = \{v \in V : v \perp S\}$.
(כלומר $v \in S^{\perp} \Rightarrow \forall u \in S \quad u \perp v$)

תרגילים:

1. הוכח שלכל $S \subseteq V$ הקב' $S^{\perp}$ היא ת"מ של V.

פתרון:

$$\forall v \in S \quad \langle v,0\rangle = 0 \Rightarrow 0 \in S^{\perp}$$

$$u, w \in S^{\perp}, k \in F \Rightarrow \forall v \in S \quad \langle u+kw, v\rangle = \langle u,v\rangle + k\langle w,v\rangle = 0 \Rightarrow u+kw \in S^{\perp}$$

2. א. הוכח שכל ת"מ L ממימד 1 של R^2 הוא ישר העובר דרך הראשית.
ב. הוכח שעבור ת"מ כזה המרחב הניצב לו במ"פ הוא הישר הניצב לו ועובר דרך הראשית.

פתרון:

א. מרחב ממשי ממימד אחד הוא ישר ות"מ חייב להכיל את את איבר האפס.

ב. יהי $L: y = Ax + B$ כאמור הוא עובר בראשית לכן $L: y = Ax$.

כעת, בשימוש במ"פ הסטנדרטית על R^2 :

$$L^{\perp} = \{(x,y) \in R^2 : \forall (x', Ax') \in L \quad \langle (x,y),(x',Ax')\rangle = 0\}$$

אם x'=0 אז $(x', Ax') = (0,0)$ ואז הפתרון טריו' לכן נסתכל על:

$$L^{\perp} = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in R^2 : \forall (x', Ax') \neq (0,0) \quad xx' + Ayx' = 0\}$$
$$= \{(0,0)\} \cup \left\{(x,y) \in R^2 : \forall (x', Ax') \neq (0,0) \quad y = -\frac{1}{A}x\right\} =$$
$$\left\{(x,y) \in R^2 : \forall (x', Ax') \in L \quad y = -\frac{1}{A}x\right\}$$

שהוא בדיוק הישר המאונך ל L והעובר דרך הראשית כנדרש.

3. יהי V מ"ו, הוכח:

$$1. \{0\}^{\perp} = V$$
$$2. V^{\perp} = \{0\}$$
$$3. S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_1^{\perp} \supseteq S_2^{\perp}$$
$$4. \forall S \subseteq V \quad sp(S^{\perp}) = S^{\perp}$$

פתרון:

$$1. \{0\}^{\perp} = \{v \in V : \forall a \in \{0\} \quad \langle v, a \rangle = 0\} = V$$

כי זה נכון לכל v ב V.

$$2. V^{\perp} = \{v \in V : \forall a \in V \quad \langle v, a \rangle = 0\} = \{0\}$$

כי כל v אחר בהכרח לא מאונך לעצמו.

$$3. x \in S_2^{\perp} \Rightarrow \forall y \in S_2 \quad \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \text{בפרט, מהנתון:} \\ \forall a \in S_1 \quad \langle x, a \rangle = 0 \end{matrix} \Rightarrow x \in S_1^{\perp}$$

4. $\supseteq$: ברור

$\subseteq$: $\quad S^{\perp} = \{v_1, v_2, \ldots\}$.

$$\forall v \in S \quad \left\langle \sum \alpha_i v_i, v \right\rangle = \sum \alpha_i \langle v_i, v \rangle = 0 \Rightarrow \forall \sum \alpha_i v_i \in sp(S^{\perp}) \quad \sum \alpha_i v_i \in S^{\perp}$$

<u>משפט הפרוק הניצב:</u>

לכל $W \subseteq V$ ת"מ : $V = W \oplus W^{\perp}$.

<u>טענה:</u> לכל $W \subseteq V$ ת"מ: $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$.

<u>תרגיל:</u> R^3 ממ"פ עם המ"פ הסטנדרטית. $W = sp\{(1,2,3),0,1,2)\}$.

א. $\dim(W^{\perp}) = ?$

ב. $W^{\perp} = ?$

פתרון:

א. $\dim(W^{\perp}) = 1$ היות ומימד R^3 הוא 3 ומימד W הוא 2.

ב.

$$W = sp\{(x, y, z)\}$$

$$\langle (1,2,3), (x, y, z) \rangle = 0 \wedge \langle (0,1,2), (x, y, z) \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x + 2y + 3z = 0 \wedge y + 2z = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = -2z, x = z$$

$\dim(W^{\perp}) = 1$ אזי כל הוקטורים בת"מ זה זהים עד כדי מכפלה בסקלר לכן:
$W = sp\{(1,-2,1)\}$.
(ניתן לבדוק אורתוגונליות. הבת"ל ינבע ממנה)