תרגול 4 בדידה להנדסה

21 בינואר 2015

כמה הגדרות להמשך הדרך:

1. הקבוצה הריקה היא הקבוצה בה אין איברים כלל; נסמנה ב$-\phi$.
2. נאמר שקבוצה A מוכלת בקבוצה B (או שהקבוצה A היא תת קבוצה של הקבוצה B) ונסמן $A \subseteq B$, אם מתקיים:

$$(x \in A) \to (x \in B)$$

כלומר, כל האיברים של A נמצאים גם בקבוצה B.

3. הקבוצה האוניברסלית היא הקבוצה בה "אנחנו נמצאים", כלומר כל הקבוצות שלנו מוכלות בה. תסומן בדרך כלל ב$-U$ או ב$-\Omega$.
4. הקבוצה המשלימה של קבוצה A היא הקבוצה $U \backslash A$ ומסומנת A^c או $\bar{A}$.
5. קבוצת החזקה של קבוצה A היא הקבוצה:

$$P(A) = \{B | B \subseteq A\}$$

כלומר קבוצת החזקה היא קבוצת כל תתי הקבוצות של A.

מההגדרות שלנו נקבל שמתקיימות כמה תכונות:

$$A \cap U = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cup A^c = U$$

$$A \cap A^c = \phi$$

נאמר שקבוצות הן שוות אם יש בהן את אותם האיברים.

איך מראים שיוויון בין קבוצות?

ראשית, נבחין ש:

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \to A = B$$

כלומר אם קבוצות מכילות זו את זו אז הן שוות.

אם כך, כדי להראות שיוויון בין קבוצות, אפשר להראות שהן מכילות זו את זו. דרך זו נקראת "הכלה דו־כיוונית".

איך מראים הכלה בין קבוצות?

אם, למשל, נרצה להראות $A \subseteq B$, ניקח איבר $x \in A$ ובעזרת גרירות לוגיות מותרות נראה שגם $x \in B$.

לשון אחר, נראה שאכן $x \in A \to x \in B$, וזו בדיוק ההכלה.

אפשר "לחסוך" הכלה אחת אם בהוכחת הכלה מסויימת משתמשים רק בגרירות כפולות, "אם ורק אם".

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו את חוקי דה־מורגן לקבוצות, כלומר:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

<u>הוכחה:</u>

נוכיח קודם כל את השוויון הראשון.

ראשית, נראה הכלה לצד אחד: $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

כמו שביארנו, ניקח $x \in (A \cap B)^c$. לכן, לפי הגדרת המשלים:

$$x \notin (A \cap B)$$

לכן:

$$(x \notin A) \vee (x \notin B)$$

ולפי הגדרת משלים:

$$(x \in A^c) \cup (x \in B^c)$$

ולפי הגדרת איחוד:

$$x \in A^c \cup B^c$$

ואם כן הוכחנו שמתקיים $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

שימו לב שכל הגרירות שלנו הן "אם ורק אם" (למשל $(x \in A^c) \cup (x \in B^c) \leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$) ולכן בעצם הראנו הכלה לשני הכיוונים, כלומר אכן:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

השיוויון השני מוכח באופן דומה.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו שלכל A, B, C קבוצות מתקיים:

$$A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$$

<u>פתרון:</u>

נשתמש בהכלה דו־כיוונית.

יהי $x \in A \cap (B \backslash C)$. לכן:

$$(x \in A) \wedge (x \in B \backslash C)$$

לפי הגדרת חיתוך. לפי הגדרת הפרש נקבל:

$$(x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \notin C))$$

כעת, אם נוסיף $\wedge (x \in A)$ זה לא ישנה, מכיוון ש: $(x \in A) \equiv (x \in A) \wedge (x \in A)$, כלומר:

$$(x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \notin C)) \wedge (x \in A)$$

נזכור ש$-\wedge$ הוא קשר חילופי וקיבוצי, ולכן:

$$((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge ((x \notin C) \wedge (x \in A))$$

ולפי הגדרת חיתוך נקבל:

$$(x \in A \cap B) \wedge (x \notin A \cap C)$$

ולפי הגדרת הפרש:

$$x \in ((A \cap B) \backslash (A \cap C))$$

והוכחנו $(A\cap C)\backslash(A\cap B) \subseteq (B\backslash C) \cap A$. הכיוון השני דומה.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו:

$$\{2n+3|n\in\mathbb{Z}\}=\{2n+1|n\in\mathbb{Z}\}$$

<u>פתרון:</u>

נשתמש בהכלה דו־כיוונית.

לכיוון אחד, יהי $x\in\{2n+1|n\in\mathbb{Z}\}$ כלומר קיים $n\in\mathbb{Z}$ עבורו: $x=2n+1$.

לכן: $x=2(n-1)+3$. מכיוון ש־$n\in\mathbb{Z}$ אז גם $n-1\in\mathbb{Z}$ ולכן לפי הגדרת $\{2n+3|n\in\mathbb{Z}\}$ נקבל שאכן $x\in\{2n+3|n\in\mathbb{Z}\}$, כלומר:

$$\{2n+3|n\in\mathbb{Z}\}\supseteq\{2n+1|n\in\mathbb{Z}\}$$

לכיוון השני, יהי $x\in\{2n+3|n\in\mathbb{Z}\}$ כלומר קיים $n\in\mathbb{Z}$ עבורו $x=2n+3$.

לכן: $x=2(n+1)+1$. מכיוון ש־$n\in\mathbb{Z}$ אז גם $n+1\in\mathbb{Z}$ ולכן לפי הגדרת $\{2n+1|n\in\mathbb{Z}\}$ נקבל שאכן $x\in\{2n+1|n\in\mathbb{Z}\}$, כלומר:

$$\{2n+3|n\in\mathbb{Z}\}\subseteq\{2n+1|n\in\mathbb{Z}\}$$

ולכן סה"כ לפי הכלה דו־כיוונית נקבל:

$$\{2n+3|n\in\mathbb{Z}\}=\{2n+1|n\in\mathbb{Z}\}$$

תכונות האיחוד והחיתוך:

1. קיבוציות:

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

2. חילופיות:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

3. פילוג:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$