תרגיל 6

להגשה עד 26.12.16

שאלה 1

תנו דוגמא **לאי קיום** משפט ההתכנסות המונוטונית עבור סדרה **יורדת** של פונקציות מדידות ואי שליליות.

שאלה 2

יהיו $(\mathbb{X},\mathbb{A},\mu)$ מרחב מידה חיובית, $E\in\mathbb{A}$ כך ש: $\mu(E)>0$ וגם: $\mu(\mathbb{X}\setminus E)>0$.
נגדיר סדרה $f_n\colon\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ על ידי: לכל $k\in\mathbb{N}$:

$$f_{2k}:=\mathbf{1}_{E^c}$$
$$f_{2k-1}:=\mathbf{1}_{E}$$

הראו כי מקרה זה מהווה דוגמא לאי שוויון חד בלמה של פאטו.

שאלה 3

תהי $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות מדידות אי שליליות מעל מרחב מידה חיובית $(\mathbb{X},\mathbb{A},\mu)$.
הוכיחו:

1. אם $f_n\searrow f$ וקיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש: $\int_{\mathbb{X}}f_Nd\mu<\infty$ אזי: $\int_{\mathbb{X}}f_nd\mu\to\int_{\mathbb{X}}fd\mu$.
2. אם $f_n\to f$ ולכל $n\in\mathbb{N}$: $f_n\le f$ אזי: $\int_{\mathbb{X}}f_nd\mu\to\int_{\mathbb{X}}fd\mu$.

שאלה 4

יהי (X,S,μ) ממ"ח σ־סופי. ונניח כי $f:X\to\mathbb{R}$ הינה אינטגרבילית ואי שלילית. הוכיחו כי אם $\epsilon>0$ אזי קיימת $A\in S$ כך ש $\mu(A)<\infty$ ומתקיים

$$.\epsilon+\int_A fd\mu>\int_X fd\mu$$

שאלה 5

יהי $(X,\mathbb{A},\mu)$ מרחב מידה חיובית σ־סופית, ותהי f פונקציה אי שלילית, מדידה־μ, המקיימת: $\int_X f\ d\mu=\infty$.
הראו שלכל $M>0$ קיימת פונקציה g מדידה־μ, כך ש: $0\le g(x)\le f(x)$ (כב"מ), וכן מתקיים:

1. $\int_X g\ d\mu\ge M$.
2. g חסומה (כב"מ).
3. $\mu([g\neq 0])<\infty$.

שאלה 6

תהי $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת $g(x)=g(x+1)$ לכל $x\in\mathbb{R}$, ובנוסף: $\int_0^1 g(x)dx<\infty$. נגדיר:

$$f(x):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(nx)}{n^2}$$

הראו ש f סופית כב"מ.

בהצלחה!!