ד.

היום נלמד על טנזורים:

כתיב מוסכמות:

1 - כל הוקטורים הם וקטורי עמודה. למשל, $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

⇐ וקטור שורה יסומן v^t.

2 - קואורדינטות של וקטור למעלה: למשל: $v=\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{pmatrix}$.

3 - וקטור מתוך קבוצה, האינדקס למטה.

$$X=\{v_1,v_2,v_3\}$$

4 - כאשר יש אותו אינדקס למטה ולמעלה: כלומר יש סכימה על האינדקס הזה נעשה סכום בסכימה של איינשטיין.

דוגמא: $\mathbb{R}^3$ עם הבסיס הסטנדרטי.

$$\{e_1,e_2,e_3\}$$

יהי וקטור $v=\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{pmatrix}$

$$v=\sum_{i=1}^{3} v^i\cdot e_i \underset{\text{איינשטיין}}{\equiv} v^i\cdot e_i$$

אז: $v^i e_i$ זהו יצוג שיש סכימה על אינדקס i.

$$\left.\begin{matrix} \text{סכימה} - i. \\ \text{חופשי} - \phi. \end{matrix}\right\} \longrightarrow \sum_i v^i e_i$$

דוג': עם רכיבים חופשים.

$$v^i e_i \cdot u_j \cdot w_j$$

$$\left.\begin{matrix} \text{סכימה}: i. \\ \text{חופשי}: j. \end{matrix}\right\} \longrightarrow \sum_i v^i e_i u_j \cdot w_j = u_j \cdot w_j \sum_i v^i e_i$$

[כי לא מופיע למעלה ולמטה].

5 – מטריצות: איבר בשורה i ועמודה j. מאלגברה: a_{ij}.

אצלנו: a_{ij} אז ~~a^i_j~~ לא מוגדר אלא חופשים

$$\overset{\text{שורה} \rightarrow}{} a^{i}{}_{j} \underset{\leftarrow \text{עמודה}}{}.$$

המטריצה שאיברה הוא a_{ij} או a^i_j היא: (a_{ij}) או בהתאמה (a^i_j).

6 – מה כופלים ( ) – $(a^i_j) \equiv (a_{ij})$ היא: (a^{ij}).

דוג': מערכת משוואות ליניארית:

$$A \cdot X = b \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & \\ a^m_1 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

וקטור כמשתנים.

וקטור כפתרונות.

$$b^1 = a^1_1 \cdot x^1 + a^1_2 \cdot x^2 + \dots + a^1_n \cdot x^n$$

$$b^1 = \sum_{i=1}^{n} a^1_i \cdot x^i \equiv a^1_i \cdot x^i$$

איינשטיין.

באותו אופן:

$$b^j = a^j_i \cdot x^i$$

סכימה: i.

חופשי: j.

(7) - מט' יחידה:

$$\delta_{ij} = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \equiv I$$

מט' יחידה.

$$\text{מט' יחידה} \equiv \left(\delta^i_j\right)$$

תרגיל: לפשט את הביטוי, (מכפלה).

$$\delta_{ij} u^i v^j$$

סכימה: i, j

חופשי: ϕ.

$$\sum_i \sum_j \delta_{ij} u^i v^j =$$

מאפס $i \neq j$ כל כולם.

$$= \sum_i u^i \cdot v^i$$

תרגיל 3: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$.

$$u=\begin{pmatrix}u^1\\u^2\\\vdots\\u^n\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\\vdots\\v^n\end{pmatrix}$$

מכפלה פנימית — של u,v:

$$\langle u,v\rangle = u^1\cdot v^1+\dots+u^n\cdot v^n=\sum_i u^i v^i$$

אם אפשר לוותר על ה — Σ לפי איינשטיין, יחד עם δ, אז, לפי תרגיל קודם:

$$\equiv \delta_{ij}u^i v^j$$

8 — V מט' העתקות לינאריות:

$$A(v)=A\cdot v$$

נסמן: (a^i_j).

מט' תבניות בילינאריות:

$$B(u,v)=u^t\cdot B\cdot v$$

וכן נסמן ע"י (a_{ij}).

הבדל: כפל מט':

$$a^i_j v^j$$

דוגמה — בילינאריות:

$$B\cdot v=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\\vdots\\v^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}\cdot v^1+\dots+b_{1n}\cdot v^n\\\vdots\\b_{n1}\cdot v^1+\dots+b_{nn}\cdot v^n\end{pmatrix}$$

$u^t = (u^1, \dots, u^n)$

$(u^t)(Bv) = b_{11} u^1 \cdot v^1 + \dots + b_{1n} \cdot u^1 \cdot v^n + \dots + b_{n1} \cdot u^n \cdot v^1 + \dots + b_{nn} \cdot u^n \cdot v^n =$

$$= \sum_i \sum_j b_{ij} u^i v^j \underset{\text{איינשטיין}}{\equiv} b_{ij} u^i v^j$$

⑨ $a^i_{\underline{i}}$ – אומר <u>שלא</u> עושים איינשטיין.

נגיד: ① $a^i_i = \sum_i a^i_i \equiv tr(A)$

סכימה – i

חופשי – $\emptyset$.

② –

$a^i_{\underline{i}}$

סכימה: $\emptyset$.

חופשי: i.

כי פשוט האיבר במיקום i,i של המט' (a^i_j).

<u>תרגיל</u>: (מסוג שיש במבחן).

פתרון:

$f^i_j \cdot \delta^j_k$

סכימה – j

חופשי – i,k.

[$\sum_j \delta^i_j \cdot \delta^j_k$, תשובה 3ב2]

את הפיתרון:

$$\delta^i_{\cancel{j}} \, \delta^{\cancel{j}}_k = \delta^i_k$$

תרגיל: להוכיח כי כפל מט' הוא אסוציאטיבי ?

פתרון: צריך להראות ש: $(AB)\cdot C = A(BC)$

האיבר ה- ij של $(AB)\cdot C$ - זה שורה i של (AB) כפול ~~עמוד~~ עמודה j של C.

נסמן: $AB \equiv D$.

$$d^i_k \cdot c^k_j = (a^i_l \, b^l_k) \, c^k_j$$

סכימה – k

חופשי – i,j

$$= a^i_l \cdot b^l_k \cdot c^k_j =$$

סכימה: l, k

חופשי: i, j

$$\left[= \sum_l \sum_k a^i_l \, b^l_k \, c^k_j \, . \right]$$

אגף שני: $BC \equiv F$. אז האיבר ה- ij של $A \cdot F$ הוא: $a^i_l \cdot F^l_j =$

$$= a^i_l \cdot (b^l_k \cdot c^k_j) \underset{\text{סקלרים [illegible]}}{=} a^i_l \cdot b^l_k \cdot c^k_j$$

מש"ל

10 — סימטריזציה ואנטי-סימטריזציה:

לפעמים מופיע:

$$a_{ij}+a_{ji}=2a_{\{ij\}}$$

הגדרת סימטריזציה:

$$a_{\{ij\}}=\frac{1}{2}\cdot\left(a_{ij}+a_{ji}\right)$$

הגדרת אנטי-סימטריזציה:

$$a_{[ij]}=\frac{1}{2}\cdot\left(a_{ij}-a_{ji}\right)$$

תרגיל: רשום מפורשות את הביטוי:

$$a^{i}{}_{\{j}\cdot b^{j}{}_{k\}}=\frac{1}{2}\cdot\left(a^{i}{}_{j}\cdot b^{j}{}_{k}+a^{i}{}_{k}\cdot b^{j}{}_{j}\right).$$

רק על מי שלמטה.

תרגיל: רשום את:

$$a^{i}{}_{j}\,g^{k[l}\,b^{i]}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(a^{i}{}_{j}\,g^{kl}\cdot b^{i}\right)-\left(a^{i}{}_{j}\,g^{ki}\,b^{l}\right)\right]$$

סכימה — ϕ.

חופשיים — i,j,k,l.

תרגיל: לפשט:

$$\delta^i_{[j}\,\delta^j_{i]} = \qquad 1\le i,j\le 5.$$

פתרון:

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\delta^i_{\cancel{j}}\cdot\cancel{\delta^j}_i + \delta^i_i\cdot\delta^j_j\right)$$

כפולים – i,j

חופשיים – $\emptyset$.

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\delta^i_i}_{5} + \underbrace{\delta^i_i}_{5}\,\underbrace{\delta^j_j}_{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(5+25) = \underline{\underline{15}}.$$

תרגיל: ~~הראה~~ תהא (L^i_j) מט׳ 2×2.

לרשום ע״י אנטיסימטריזציה את: $\det(L^i_j)$.

פתרון:

$$L^i_j = \begin{pmatrix} L^1_1 & L^1_2 \\ L^2_1 & L^2_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(L^i_j) = L^1_1\cdot L^2_2 - L^1_2\cdot L^2_1$$

$$= 2\cdot L^1_{[1} L^2_{2]}$$