תזכורת:

תהי A קבוצה, המכפלה הקרטזית $A \times A$ היא קבוצת כל הזוגות הסדורים ששני הרכיבים שלהם שייכים ל־A. תת־קבוצה $R \subseteq A \times A$ נקראת יחס על A. כמה תכונות חשובות של יחסים:

1. רפלקסיביות: R נקרא רפלקסיבי, אם לכל $a \in A$ מתקיים: $(a,a) \in R$; במילים: כל איבר נמצא בזוג עם עצמו.

איך נתחיל הוכחת רפלקסיביות? יהי $a \in A$, צ"ל: $(a,a) \in R$ (או aRa).

2. סימטריות: R נקרא סימטרי, אם לכל $a,b \in A$, מתקיים: $(a,b) \in R \to (b,a) \in R$; במילים: **אם** זוג נמצא ביחס גם ההפוך שלו נמצא ביחס. במילים אחרות, R **לא** סימטרי אם ב־R נמצא זוג שההפוך שלו **לא** נמצא.

איך נתחיל הוכחת סימטריות? יהיו $a,b \in A$ כך ש: $(a,b) \in R$, צ"ל: $(b,a) \in R$.

3. טרנזיטיביות: R נקרא טרנזיטיבי, אם לכל $a,b,c \in A$, מתקיים: $(a,b),(b,c) \in R \to (a,c) \in R$. במילים: כלל המעבר. במילים אחרות: R **לא** טרנזיטיבי אם קיימים שני זוגות $(a,b),(b,c)$ ב־R כך ש: (a,c) לא נמצא ב־R. לכן, למשל, היחס $\{(1,3)\}$ הוא טרנזיטיבי.

אם R מקיים את כל 3 התכונות האלו, R נקרא יחס שקילות.

ביחס שקילות, אנחנו יכולים להגדיר שני מושגים חדשים - מחלקת שקילות וקבוצת מנה.

יהיו A קבוצה ו־R יחס שקילות על A (יח"ש). לכל איבר $a \in A$, מחלקת השקילות של a מוגדרת כך:

$$[a]_R = \{b \in A | (a,b) \in R\}$$

כל האיברים שנמצאים עם a בזוג ביחס. קבוצת המנה היא הקבוצה של כל מחלקות השקילות:

$$A/R = \{[a]_R | a \in A\}$$

דוגמאות:

1. $A = \{1,2,3,4\}$, $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1)\}$.

נרשום את מחלקות השקילות של כל האיברים:

$$[1]_R=\{1,3\}\,,[2]_R=\{2\}\,,[3]_R=\{1,3\}\,,[4]_R=\{4\}$$

קבוצת המנה:

$$A/R=\{\{1,3\}\,,\{2\}\,,\{4\}\}$$

נשים לב: כל מחלקות השקילות הן לא ריקות (יתר על כן, $a\in[a]_R$), האיחוד שלהן הוא כל A:

$$\bigcup_{a\in A}[a]_R=\cup A/R=A=\{1,2,3,4\}$$

דבר אחרון: מחלקות השקילות זרות (אין איברים משותפים בכלל) או שוות; יתר על כן, אם $(a,b)\in R$ אז $[a]_R=[b]_R$, ואם $(a,b)\notin R$ אז $[a]_R\cap[b]_R=\emptyset$.

2. A קבוצת הסטודנטים בחממה האקדמית בקיץ תש"ף (כל החתיכים). נגדיר R באופן הבא - שני סטודנטים a,b מתייחסים זה לזה אם הם רשומים לאותה קבוצת הרצאה בבדידה. (דוגמאות דומות: שייכים לאותה כיתה בבית הספר, וכיוצא בזה). R יחס שקילות. מחלקת השקילות של כל סטודנט (הסטודנטים שמתייחסים אליו) היא קבוצת ההרצאה שלו. לכן, קבוצת המנה:

$$A/R=\{erez,elad,tamar,\ldots\}$$

3. על $A=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ נגדיר יחס R באופן הבא: $((a,b)\,,(c,d))\in R$ אם ורק אם: $ad=bc$ (במילים: שני זוגות נמצאים ביחד בזוג אם הרכיב הראשון כפול הרכיב השני שווה לרכיב השני כפול הרכיב הראשון. למשל: $((2,3)\,,(6,9))\in R$, כי: $2\cdot 9=3\cdot 6$. מצד שני: $((1,1)\,,(4,9))\notin R$, כי: $1\cdot 9\neq 1\cdot 4$).

R הוא יחס שקילות. איך, למשל, נראית מחלקת השקילות של $(1,2)$? לפי ההגדרה:

$$[(1,2)]_R=\{(c,d)\in A|\,((1,2)\,,(c,d))\in R\}=\{(c,d)\in A|1\cdot d=2\cdot c\}$$

$$=\{(c,2c)\,|c\in\mathbb{Z}\}=\{(1,2)\,,(2,4)\,,(3,6)\,,\ldots\}$$

באופן כללי, איך נראית מחלקת שקילות של (a,b)?

$$[(a,b)]_R = \{(c,d) \in A | \left((a,b),(c,d)\right) \in R\} = \{(c,d) \in A | a \cdot d = b \cdot c\}$$

אם רוצים לבטא את d באמצעות c, אנחנו צריכים לצמצם ב־a, אבל אז צריך לחלק למקרים - מה קורה אם $a=0$ ומה קורה אם $a \neq 0$. לא ניכנס לעומק הדברים. רק נשים לב שאינטואיטיבית, אפשר להתאים לכל מחלקת שקילות מספר רציונלי (האיבר הראשון חלקי האיבר השני, למשל: $[(1,2)]_R \mapsto \frac{1}{2}$).

נחזור למה ששמנו לב אליו בדוגמה הראשונה, ננסח כמשפט כללי ונוכיח.

<u>משפט:</u>

תהי A קבוצה ויהי R יחס שקילות על A. מחלקות השקילות מקיימות:

1. לכל $a \in A$, $[a]_R \neq \emptyset$.
2. לכל $a,b \in A$, אם $(a,b) \in R$ אז $[a]_R = [b]_R$ ואם $(a,b) \notin R$ אז $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.
3. $\bigcup_{a \in A} [a]_R = \cup A/R = A$.

<u>הוכחה:</u>

1. לכל $a \in A$, מכיוון ש־R רפלקסיבי, $(a,a) \in R$ ולכן - לפי הגדרת מחלקת שקילות - $a \in [a]_R$, בפרט: $[a]_R \neq \emptyset$.
2. מקרה ראשון: $(a,b) \in R$, צ"ל: $[a]_R = [b]_R$. בעיקרון, אנחנו צריכים להוכיח שוויון בין קבוצות ולכן להוכיח הכלה דו־כיוונית. בפועל, מספיק להוכיח כיוון אחד, הכיוון השני יראה אותו דבר רק עם אותיות הפוכות (b במקום a ולהיפך).

אם כן, יהי $x \in [a]_R$, צ"ל: $x \in [b]_R$. אנו יודעים ש: $(a,b) \in R$, ובנוסף - לפי הגדרת מחלקת שקילות - $(a,x) \in R$. צ"ל: $(b,x) \in R$.

ובכן, $(a,b),(a,x) \in R$. היחס סימטרי, ולכן גם $(x,a) \in R$. לכן, $(x,a),(a,b) \in R$ ומכיוון ש־R טרנזיטיבי, $(x,b) \in R$. R סימטרי, ולכן גם: $(b,x) \in R$, כנדרש.

מקרה שני: $(a,b) \notin R$, צ"ל: $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$. נניח בשלילה ש: $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$. לכן, קיים $x \in [a]_R \cap [b]_R$, ולפי הגדרת חיתוך פירוש הדבר ש: $x \in [a]_R \wedge x \in [b]_R$. לפי הגדרת מחלקת שקילות, נקבל ש: $(a,x),(b,x) \in R$.

מכיוון ש־R סימטרי, גם $(x,b) \in R$; לכן, $(a,x),(x,b) \in R$ ומכך ש־R טרנזיטיבי נקבל: $(a,b) \in R$, סתירה.

3. נשתמש בהכלה דו־כיוונית. מצד אחד, יהי $x \in A$, צ"ל: $\bigcup_{a\in A}[a]_R$. כפי שראינו בסעיף הראשון, $x \in [x]_R$. x שייך לאחת ממחלקות השקילות ולכן שייך לאיחוד של כולן, כלומר: $x \in \bigcup_{a\in A}[a]_R$. לכן: $A \subseteq \bigcup_{a\in A}[a]_R$.
מצד שני, כל מחלקת שקילות מוכלת ב־A: $[a]_R = \{b \in A | (a,b) \in R\} \subseteq A$. לכן גם: $\bigcup_{a\in A}[a]_R \subseteq A$.
ביתר פירוט: אם $x \in \bigcup_{a\in A}[a]_R$, לפי הגדרת איחוד קיימת $[a]_R$ כך ש: $x \in [a]_R$; לפי הגדרת הכלה, $x \in A$ וסה"כ: $\bigcup_{a\in A}[a]_R \subseteq A$.

<u>חלוקה של קבוצה:</u>

ראינו שמחלקות השקילות הן אוסף של קבוצות שמקיים 3 תנאים: הקבוצות לא ריקות, הן זרות (או שוות) והאיחוד שלהן הוא כל הקבוצה. אם יש יחס שקילות, הוא מגדיר אוסף "נחמד" כזה של קבוצות (מחלקות השקילות). השאלה שנענה עליה עכשיו היא השאלה ההפוכה – אם יש לנו אוסף "נחמד" כזה של קבוצות, האם הוא מגדיר יחס שקילות?
כדי לענות, ננסח את הדברים כמו שצריך, בעזרת המושג של חלוקה.
תהי A קבוצה. אוסף של קבוצות $\mathcal{F} \subseteq P(A)$ נקרא **חלוקה** של A, אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. לכל $A_i \in \mathcal{F}$, $A_i \neq \emptyset$ (במילים: הקבוצות לא ריקות).
2. לכל $A_i, A_j \in \mathcal{F}$, אם $i \neq j$ אז $A_i \cap A_j = \emptyset$ (הקבוצות זרות).
3. $\cup\mathcal{F} = A$.

לפי מה שראינו – אם R יחס שקילות על A, קבוצת המנה A/R היא חלוקה של A. אפשר לנסח את השאלה שלנו באופן הבא – בהינתן חלוקה $\mathcal{F}$ של A, האם יש יחס שקילות R על A עבורו: $\mathcal{F} = A/R$ (במילים: האם לכל חלוקה יש יחס שקילות כך שהחלוקה היא קבוצת המנה)?

<u>דוגמה:</u>

<u>$A = \{1,2,3,4,5\}$</u> ונתבונן בקבוצות הבאות:

$$\mathcal{F}_1 = \{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\}\}$$

$$\mathcal{F}_3 = \{\{1,2\},\{3,5\}\}$$

$$\mathcal{F}_4 = \{\{1,3\},\{2,4\},\{5\},\emptyset\}$$

$$\mathcal{F}_5 = \{\{1\},\{2\},\{3,4\},\{5\}\}$$

$\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_5$ חלוקות של A. $\mathcal{F}_2$ לא חלוקה של A כי הקבוצות לא זרות; $\mathcal{F}_3$ לא חלוקה של A כי האיחוד של הקבוצות לא שווה ל־A (חסר 4), $\mathcal{F}_4$ כי אחת מהקבוצות ריקה.

התשובה לשאלה היא כן – לכל חלוקה יש יחס שקילות שקבוצת המנה שלו שווה לחלוקה.

יחס מושרה מחלוקה:

תהי A קבוצה ותהי $\mathcal{F} = \{A_i | i \in I\}$ חלוקה של A. היחס $R_{\mathcal{F}}$ על A, המוגדר באופן הבא:

$$(a,b) \in R_{\mathcal{F}} \iff \exists i \in I : a \in A_i \wedge b \in A_i$$

במילים: שני איברים מתייחסים זה לזה אם הם נמצאים באותה הקבוצה מתוך הקבוצות של החלוקה. היחס $R_{\mathcal{F}}$ הוא יחס שקילות, ובנוסף לכך: $A/R = \mathcal{F}$. $R_{\mathcal{F}}$ נקרא היחס **המושרה** מהחלוקה $\mathcal{F}$.

למשל: $A = \{1,2,3,4\}$ עם החלוקה: $\mathcal{F} = \{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$. נקבל:

$$R_{\mathcal{F}} = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2),(4,4)\}$$

הזוגות $(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)$ מתקבלים מהקבוצה $\{1,3\}$. הזוג $(2,2)$ מתקבל מהקבוצה $\{2\}$, הזוג $(4,4)$ מתקבל מהקבוצה $\{4\}$.

נשים לב – מכל קבוצה בחלוקה אנחנו בונים את כל הזוגות האפשריים, מהקבוצה $\{1,3\}$ בנינו את כל הזוגות שהאיברים שלהם הם 1 או 3, בעצם

את $\{1,3\}\times\{1,3\}$, מהקבוצה $\{2\}$ בנינו את $\{2\}\times\{2\}$ ומ־$\{4\}$ בנינו את $\{4\}\times\{4\}$.

דוגמה נוספת, החלוקה: $\mathcal{H}=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$. נקבל:

$$R_{\mathcal{H}}=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$$

כל הזוגות $\{1,2\}\times\{1,2\}$ וכל הזוגות $\{3,4\}\times\{3,4\}$.

באופן כללי, אפשר לומר:

$$R_{\mathcal{F}}=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$$

בדוגמאות שלנו:

$$R_{\mathcal{F}}=(\{1,3\}\times\{1,3\})\cup(\{2\}\times\{2\})\cup(\{4\}\times\{4\})$$

$$R_{\mathcal{H}}=(\{1,2\}\times\{1,2\})\cup(\{3,4\}\times\{3,4\})$$

נוכיח ש־$R_{\mathcal{F}}$ הוא אכן יחס שקילות, נדגיש: $(a,b)\in R_{\mathcal{F}}\iff\exists i\in I:a\in A_i\wedge b\in A_i$.

רפלקסיביות: יהי $a\in A$, צ"ל: $(a,a)\in R_{\mathcal{F}}$. מכיוון ש־$\mathcal{F}$ חלוקה, $\cup\mathcal{F}=A$ ולכן קיים $i\in I$ כך ש: $a\in A_i$ (לכל איבר יש קבוצה שהוא שייך אליה, כי האיחוד של כל הקבוצות הוא כל הקבוצה). אפשר לרשום: $a\in A_i\wedge a\in A_i$ ולכן – לפי הגדרת היחס – $(a,a)\in R_{\mathcal{F}}$.

סימטריות: יהיו $a,b\in A$ כך ש: $(a,b)\in R_{\mathcal{F}}$, צ"ל: $(b,a)\in R_{\mathcal{F}}$. אם כן, $(a,b)\in R_{\mathcal{F}}$ ולכן – לפי הגדרת היחס: $\exists i\in I:a\in A_i\wedge b\in A_i$. אפשר לרשום: $\exists i\in I:b\in A_i\wedge a\in A_i$ ("וגם" הוא קשר חילופי) ולכן – לפי הגדרת היחס – $(b,a)\in R_{\mathcal{F}}$.

טרנזיטיביות: יהיו $a,b,c\in A$ כך ש: $(a,b),(b,c)\in R_{\mathcal{F}}$, צ"ל: $(a,c)\in R_{\mathcal{F}}$. אם כן, נתון $(a,b)\in R_{\mathcal{F}}$ ולכן – לפי הגדרת היחס – $\exists i\in I:a\in A_i\wedge b\in A_i$.

באופן דומה, $(b,c)\in R_{\mathcal{F}}$ ולכן – לפי הגדרת היחס – $\exists j\in I:b\in A_j\wedge c\in A_j$. כעת, $b\in A_i\wedge b\in A_j$. A_i,A_j לא זרות, ולכן – מכיוון ש־$\mathcal{F}$ חלוקה

– הן בהכרח שוות: $A_i = A_j$. בפרט, אפשר לומר ש: $a, b, c \in A_i$ ולכן: $\exists i \in I : a \in A_i \wedge c \in A_i$. לפי הגדרת היחס, נקבל שאכן: $(a,c) \in R_{\mathcal{F}}$.
סה"כ, אכן יחס שקילות.
לבסוף, נבדוק שקבוצת המנה היא אכן החלוקה. איך נראית מחלקת שקילות?

$$[a]_{R_{\mathcal{F}}} = \{b \in A | \, (a,b) \in R_{\mathcal{F}}\} = \{b \in A | \exists i \in I : a \in A_i \wedge b \in A_i\} = A_i$$

מחלקות השקילות הן הקבוצות של החלוקה, ואכן: $A/_{R_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$.

*הערה: לספור יחסי שקילות=לספור חלוקות; עושים זאת באמצעות מספרי סטירלינג ומספרי בל.

יחסי סדר:

תזכורת: תהי A קבוצה ויהי R יחס על A. R נקרא אנטי־סימטרי, אם לכל $a, b \in A$ מתקיים: $(a,b), (b,a) \in R \to a = b$. במילים, R **לא** אנטי־סימטרי אם שייכים ליחס R זוג וההפוך שלו והם שונים זה מזה.
R נקרא יחס סדר אם הוא רפלקסיבי, אנטי־סימטרי וטרנזיטיבי. נתחיל מדוגמאות.

דוגמאות:

דוגמאות בסיסיות ונפוצות ליחס סדר.

1. היחס "קטן־שווה" על מספרים ממשיים, $\mathbb{R}$: $a \le b \iff (a,b) \in R$.
(היחס ההפוך הוא "גדול־שווה"). נבדוק בקצרה שהתכונות מתקיימות:
א. רפלקסיביות: $a \le a$.
ב. אנטי־סימטריות: אם $a \le b \wedge b \le a$ אז: $a = b$.
ג. טרנזיטיביות: אם $a \le b$ וגם $b \le c$ אז: $a \le c$.

2. יחס ההכלה על קבוצה של קבוצות, X: $A \subseteq B \iff (A,B) \in R$.

3. היחס "מחלק את" על מספרים טבעיים. עבור $a, b \in \mathbb{N}$, נאמר ש־a מחלק את b ונסמן: $a|b$, אם b הוא כפולה של a. פורמלית: קיים $k \in \mathbb{N}$ כך

ש: $b=ak$. אפשר גם לומר ש־b מתחלק ב־a. למשל: $8|24$, $1|12309$, 7 לא מחלק את 8. היחס מוגדר R:

$$(a,b)\in R \iff a|b$$

א. רפלקסיביות: $a=a\cdot 1$, ולכן $a|a$.
ב. אנטי־סימטריות: אם $a|b$ וגם $b|a$, אז בפרט $a\le b$ וגם $b\le a$ ולכן $a=b$.
ג. טרנזיטיביות: נתון ש: $a|b, b|c$, צ"ל: $a|c$. אם כן, קיימים $m,n\in\mathbb{N}$ כך ש: $b=ma, c=nb$ ומכאן: $c=nma$ ולכן: $a|c$.

4. על $\mathbb{C}$, נגדיר שני יחסים באופן הבא:

$$(a+bi, c+di)\in R \iff a\le c\wedge b\le d$$

$$(a+bi, c+di)\in R_{lex} \iff a<c\vee(a=c\wedge b\le d)$$

היחס R_{lex} נקרא היחס המילוני (הלקסיקוגרפי), שני היחסים הם יחסי סדר.

<u>יחס סדר מלא:</u>
את התכונה שנציג עכשיו אפשר להגדיר לכל יחס, נתמקד ביחסי סדר.
יהיו A קבוצה ו־R יחס סדר על A. R נקרא יחס סדר מלא, אם לכל $a,b\in A$ מתקיים: $(a,b)\in R\vee(b,a)\in R$. במילים: לכל שני איברים יש זוג. שמות נוספים ליחס מלא: קווי/לניארי/משווה/טריכוטומי...
למשל: $A=\{1,2,3,4\}$, והיחסים:

$$R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2)\}$$

$$R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3),(1,3),(1,4),(2,4),(3,4)\}$$

שניהם יחסי סדר. R_1 לא מלא, למשל $1,3\in A$ אך $(1,3),(3,1)\notin R_1$. R_2 כן מלא, תכלס: $R_2=\{(a,b)\,|a\le b\}$.
מה לגבי היחסים שהצגנו מקודם?
1. היחס "קטן־שווה" הוא מלא; לכל שני מספרים ממשיים, a,b, או ש: $a\le b$ או ש: $b\le a$.

2. יחס ההכלה לא בהכרח מלא, למשל על: $P(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, כי: $\{2\} \not\subseteq \{1\}$ וגם $\{1\} \not\subseteq \{2\}$.
3. היחס "מחלק את" לא בהכרח מלא, למשל על $\mathbb{N}$, כי, למשל 7 לא מחלק את 8 וגם 8 לא מחלק את 7.
4. על $\mathbb{C}$, נגדיר שני יחסים באופן הבא:

$$(a+bi, c+di) \in R \iff a \le c \wedge b \le d$$

$$(a+bi, c+di) \in R_{lex} \iff a < c \vee (a = c \wedge b \le d)$$

R לא מלא, למשל: $3+2i, 2+3i$. R_{lex} הוא יחס מלא.