תרגיל 10

1 חזרה לקראת הבוחן

1. יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$ תת קבוצה. הוכיחו שאם (A,d) שלמה אז A סגורה ב־X.

2. יהי $(V,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי ותהי $A \subseteq V$ קבוצה חסומה. נגדיר את הקונוס הקמור והמאוזן סביב A על ידי

$$bcone(A) := \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq 1, \forall 1 \leq i \leq n : x_i \in A \Big\}$$

הוכיחו ש־$bcone(A)$ חסומה גם היא.

3. הראו שהרכבה של פונקציות ליפשיץ היא עדיין פונקציית ליפשיץ. כלומר, אם $(X,d),(Y,\rho),(Z,\nu)$ הם מרחבים מטריים ו־$f : X \to Y$ ו־$g : Y \to Z$ הן ליפשיץ, אז גם $g \circ f : X \to Z$ היא ליפשיץ.

4. הראו שכל תת קבוצה דיסקרטית של $\mathbb{R}$ היא לכל היותר בת מניה.

5. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ו־$A,B \subseteq X$. השלימו את יחסי ההכלה בין הקבוצות הבאות אם יש כאלה, הביאו דוגמאות אם לא.

   (א) $\overline{A \cap B}$ ו־$\overline{A} \cap \overline{B}$

   (ב) $\overline{A \cup B}$ ו־$\overline{A} \cup \overline{B}$

   (ג) $(A \cap B)^\circ$ ו־$A^\circ \cap B^\circ$

   (ד) $(A \cup B)^\circ$ ו־$A^\circ \cup B^\circ$

6. הראו שספרביליות אינה תורשתית, כלומר מצאו מרחב טופולוגי ספרבילי עם תת מרחב שאינו ספרבילי.

7. הוכיחו או הפריכו: חיתוך של קבוצות מושלמות הוא מושלם.

8. הראו שכל מרחב האוסדורפי ממימד אפס הוא גם $T_{2\frac{1}{2}}$ כלומר ניתן להפרדה פונקציונלית בין נקודות.

9. השתמשו בפונקציות רציפות כדי להוכיח שכל קבוצה סגורה במרחב מטרי היא G_δ. הסיקו שכל קבוצה פתוחה במרחב מטרי היא F_σ.

10. מצאו דוגמה למרחב לא מטריזבילי, הוכיחו את טענתכם.

11. הוכיחו או הפריכו: הסגור של קבוצה קשירה מסילתית ב־$\mathbb{R}$ הוא קשיר מסילתית.

12. תנו דוגמה לתת מרחב של $\mathbb{R}$ שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

2 קומפקטיות

1. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ותהי $X \supseteq \{x_n\}$ סדרה שמתכנסת ל־$x \in X$. הוכיחו ש־$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ היא קבוצה קומפקטית.

2. הוכיחו או הפריכו: (X,τ_{cof}) קומפקטית.

3. הוכיחו שמספיק לבדוק קומפקטיות לפי אברי בסיס. כלומר, אם (X,τ) מרחב טופולוגי ו־$\gamma \subseteq \tau$ בסיס ל־τ. אז X קומפקטית אם ורק אם לכל כיסוי של X עם איברים של γ יש תת כיסוי סופי.

4. מתי הטופולוגיה הקו־מנייתית היא קומפקטית?

5. הראו ש־$([0,1],\tau_s)$ כלומר הקטע הסגור עם טופולוגיית סורגנפריי אינו קומפקטי.

6. נניח ש־(X,d) מרחב מטרי ו־$A,K \subseteq X$ כאשר K קומפקטית. הוכיחו שקיימת $x_0 \in K$ כך ש־$d(K,A) = d(x_0,A)$.

   (א) הוכיחו שאם A קומפקטית, אז קיים גם $a_o \in A$ כך ש־$d(K,A) = d(x_0,a_0)$.