פתרון תרגיל בית 9 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית
88-373 סמסטר ב' תשפ"א

זמני עצירה

תרגיל 1. נתבונן בהילוך מקרי פשוט S_n על $\mathbb{Z}$ ובשני זמני העצירה

$$\tau_{88} = \min\{n \geq 0 \mid S_n = 88\}$$
$$\tau = \tau_{88} \wedge \tau_{-373} = \min\{n \geq 0 \mid S_n = 88 \text{ או } S_n = -373\}$$

לכל אחד מהמאורעות הבאים, קבעו האם הוא נמצא ב-$\mathcal{F}_{\tau_{88}}$ או ב-$\mathcal{F}_\tau$, ונמקו:

א. $A_1 = \{\exists n \geq 0 : S_n = 10\}$.

ב. $A_2 = \{\exists n \geq 0 : S_n = 88373\}$.

ג. $A_3 = \{\exists n \geq 0 : S_n > 0\}$.

פתרון. נימוקים לא פורמליים; מומלץ לחשוב איך לכתוב נימוקים פורמליים.

א. נמצא בשניהם, כי אם הגענו ל-88 אז בוודאי שגם בדרך הגענו ל-10.

ב. לא נמצא באף אחד מהם, כי כל המידע שיש לי אפילו עד הזמן τ לא מספיק כדי לקבוע האם אני אגיע ל-88373 מתישהו.

ג. נמצא ב-τ_{88} אבל לא ב-τ, כי אם הגעתי ל--373 זה לא אומר שהגעתי למספר חיובי בדרך.

תרגיל 2. יהיו τ, τ' זמני עצירה ביחס לפילטרציה $\{\mathcal{F}_n\}$. הוכיחו את שתי הטענות שהזכרנו בתרגול:

א. τ הוא $\mathcal{F}_\tau$-מדיד.

ב. אם $\tau \overset{\text{a.s.}}{\leq} \tau'$, אז $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_{\tau'}$.

הוכחה.

א. לכל n, $\{\tau \leq n\} \cap \{\tau \leq n\} = \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. לכן $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_\tau$ לכל n.

ב. יהי $A\in\mathcal{F}_\tau$. אז לכל n, $A\cap\{\tau\le n\}\in\mathcal{F}_n$. אבל

$$A\cap\{\tau'\le n\}=\underbrace{A\cap\{\tau\le n\}}_{\in\mathcal{F}_n}\cap\underbrace{\{\tau'\le n\}}_{\in\mathcal{F}_n}\in\mathcal{F}_n.$$

$\square$

תרגיל 3. מבצעים הילוך מקרי על $\mathbb{Z}$ שמתחיל ב-50. נחשוב על ההילוך בתוך הקטע $[0,100]$. מה הסיכוי שההילוך יגיע ל-45, אז ל-55 ואז יחזור ל-45 לפני שיגיע לאחד מקצוות הקטע?

פתרון. ראיתם בהרצאה שאם הילוך מקרי מתחיל בנקודה 0, הסיכוי שיגיע ל-$(-a)$ לפני שיגיע ל-b הוא $\frac{a}{a+b}$. ניעזר בזה פה: הסיכוי להגיע ל-45 לפני 100 הוא $\frac{5}{55}=\frac{1}{11}$; אחר כך הסיכוי להגיע ל-$55$ לפני 0 הוא $\frac{5}{55}=\frac{1}{11}$; ולבסוף הסיכוי להגיע ל-$45$ לפני 100 הוא שוב $\frac{1}{11}$. בסך הכל הסיכוי הדרוש הוא $\frac{1}{1331}=\frac{1}{11^3}$.

תרגיל 4. נתבונן בהילוך מקרי מוטה על $\mathbb{Z}$, עם הסתברות $p>\frac{1}{2}$ להתקדם צעד אחד ימינה והסתברות $q=1-p$ להתקדם צעד אחד שמאלה. עבור $a,b>0$, ראינו בתרגול מה הסיכוי שיגיע ל-$(-a)$ לפני שיגיע ל-b.

א. כמה זמן בתוחלת ייקח לו להגיע לאחד מקצוות הקטע $[-a,b]$? (פה כדאי להשתמש במרטינגל הלא אקספוננציאלי)

ב. כמה זמן ייקח לו להגיע ל-b?

פתרון. נסמן $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$, כאשר $S_0=0$, $X_i=\begin{cases}1, & p\\ -1, & 1-p\end{cases}$. ניזכר שראינו שני מרטינגלים: $M_n=\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$ ו-$M'_n=S_n-(2p-1)\,n$. נסמן על ידי τ_{-a} את זמן הפגיעה הראשון ב-$(-a)$, על ידי τ_b את זמן הפגיעה הראשון ב-b, ועל ידי $\tau=\tau_{-a}\wedge\tau_b$ את זמן הפגיעה באחד מקצוות הקטע. ראינו בתרגול

$$P\left(\tau_{-a}<\tau_b\right)=\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^b}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{-a}-\left(\frac{1-p}{p}\right)^b}.$$

בפרט, שימו לב ש-$P\left(\tau_b<\infty\right)=1$, כי אם נשאיף $a\to\infty$ נקבל שהסיכוי הנ"ל שואף ל-0.

א. ניעזר ב-M'_n. זמן העצירה τ סופי כמעט תמיד (כמו בתרגול) והמרטינגל חסום עד אליו, לכן אפשר להשתמש במשפט העצירה של דוב ולקבל

$$\begin{aligned}0&=\mathbb{E}\left[M'_0\right]=\mathbb{E}\left[M'_\tau\right]=\\&=P\left(\tau_{-a}<\tau_b\right)\cdot\mathbb{E}\left[(-a)-(2p-1)\,\tau\mid\tau_{-a}<\tau_b\right]+P\left(\tau_{-a}>\tau_b\right)\cdot\mathbb{E}\left[b-(2p-1)\,\tau\mid\tau_{-a}>\tau_b\right]=\\&=-a\cdot P\left(\tau_{-a}<\tau_b\right)+b\cdot P\left(\tau_{-a}>\tau_b\right)-(2p-1)\,\mathbb{E}\left[\tau\right]\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\tau\right]&=\frac{b\cdot P\left(\tau_{-a}>\tau_b\right)-a\cdot P\left(\tau_{-a}<\tau_b\right)}{2p-1}=\frac{b\cdot\left(1-P\left(\tau_{-a}>\tau_b\right)\right)-a\cdot P\left(\tau_{-a}<\tau_b\right)}{2p-1}=\\&=\frac{b}{2p-1}-\frac{a+b}{2p-1}\cdot P\left(\tau_{-a}<\tau_b\right)\end{aligned}$$

ב. נגדיר $\xi_N = \tau_{-N} \wedge \tau_b$. אז ξ_N סדרה מונוטונית עולה המתכנסת ל-τ_b (כי הוא סופי כמעט תמיד), לכן אפשר להשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית ולחשב את $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\xi_N\right]$. אבל $\lim_{N\to\infty} P\left(\tau_{-N} < \tau_b\right) = 0$, ולכן $\mathbb{E}\left[\tau_b\right] = \frac{b}{2p-1}$.

תרגיל 5. הסיקו מאי-שוויון דוב את אי-שוויון קולמוגורוב: אם $X_1, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים עם תוחלת 0, $S_k = \sum_{i=1}^k X_k$ ו-$\lambda > 0$, אז

$$P\left(\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \lambda\right) \le \frac{1}{\lambda^2}\operatorname{Var}\left(S_n\right) = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}\left(X_i\right).$$

הוכחה. כיוון ש-$\mathbb{E}\left[X_i\right] = 0$, $\operatorname{Var}\left(S_n\right) = \mathbb{E}\left[S_n^2\right]$. מאי-שוויון דוב על S_n^2,

$$P\left(\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \lambda\right) = P\left(\max_{1\le k\le n} S_k^2 \ge \lambda^2\right) \le \frac{\mathbb{E}\left[S_n^2\right]}{\lambda^2}$$

כנדרש. □

תרגיל 6. היעזרו באי-שוויון קולמוגורוב על מנת להוכיח את **משפט שני הטורים של קולמוגורוב**: יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתי-תלויים עם תוחלות μ_n ושונויות σ_n^2 סופיות. אם $\sum_{n=1}^\infty \mu_n < \infty$ ו-$\sum_{n=1}^\infty \sigma_n^2 < \infty$, אז $\sum_{n=1}^\infty X_n$ מתכנס כמעט תמיד. ראינו בעבר שהמאורע שהטור מתכנס הוא מאורע $0 - 1$, והמשפט הזה מציג לנו קריטריון מספיק להתכנסות כמעט תמיד.

(רמז: הוכיחו שסדרת הסכומים החלקיים היא סדרת קושי כמעט תמיד, על ידי כך שתבחרו $\varepsilon > 0$, ותראו שלכל $N \in \mathbb{N}$ מתקיים $P\left(\sup_{n\ge N} |S_n - S_N| \ge \lambda\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.)

הערה: הזכרנו בתרגול קריטריון הכרחי ומספיק להתכנסות של טור משתנים מקריים, שנקרא **משפט שלושת הטורים של קולמוגורוב**. אתם מוזמנים לקרוא עליו בקישור הזה.

הוכחה. בה"כ אפשר להניח ש-$\mathbb{E}\left[X_n\right] = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$; אחרת נחליף את X_n ב-$X_n - \mu_n$, וכיוון שטור התוחלות מתכנס זה לא ישפיע על התכנסות הטור המקורי. נגדיר $S_n = \sum_{i=1}^n X_n$. אז S_n הוא מרטינגל.

יהי $\varepsilon > 0$, ויהי $N \in \mathbb{N}$. מאי-שוויון קולמוגורוב

$$P\left(\sup_{n\ge N} |S_n - S_N| \ge \lambda\right) = \lim_{k\to\infty} P\left(\sup_{N\le n\le N+k} |S_n - S_N| \ge \lambda\right) \le \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\left(S_{N+k} - S_N\right)^2\right]}{\lambda^2} =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda^2}\sum_{n=N}^{N+k} \mathbb{E}\left[X_n^2\right] = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{n=N}^{\infty} \mathbb{E}\left[X_n^2\right] \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ שעבורו $P\left(\sup_{n\ge N} |S_n - S_N| \ge \lambda\right) < \varepsilon$. שימו לב שלכל $m, n \ge N$,

$$|S_n - S_m| \le |S_n - S_N| + |S_m - S_N| \le 2\sup_{k\ge N} |S_n - S_N|.$$

מפה אפשר להסיק שסדרה הסכומים החלקיים היא סדרת קושי כמעט תמיד, ולכן הטור מתכנס כמעט תמיד. □

תרגיל 7. יהי S_n הילוך מקרי מוטה על $\mathbb{Z}$. הוכיחו שהמרטינגל האקספוננציאלי המתאים לו מתכנס, וקבעו מהו הגבול.

הוכחה. המרטינגל האקספוננציאלי מתכנס כי הוא מרטינגל אי-שלילי. נסמן על ידי p את ההסתברות להתקדם ימינה. נחלק לשני מקרים:

- אם $p > \frac{1}{2}$, אז $\frac{1-p}{p} < 1$ וההילוך המקרי מתכנס ל-∞, ולכן $M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} \to 0$.
- אם $p < \frac{1}{2}$, אז $\frac{1-p}{p} > 1$ וההילוך המקרי מתכנס ל-$-\infty$, ולכן $M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} \to 0$.

□

בהצלחה!