אינפי 4 תרגול 11

16 ביוני 2015

נפתור את מבחן מועד ב' משנת תשע"א.

במבחן 6 שאלות, כל שאלה שווה 21 נקודות; יש לפתור 5 שאלות.

1. חשבו את האינטגרל:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

כאשר: $\Gamma = \{(x,y) : (x-800)^2 + (y+500)^2 = 400\}$ בכיוון החיובי.

<u>פתרון:</u>

Γ היא מעגל עם רדיוס 20 ומרכז בנקודה $(800,-500)$, כלומר לא מקיפה את ראשית הצירים.

לכן, אפשר להשתמש במשפט גרין:

$$\int\limits_{\Gamma} (P,O)d\vec{r} = \iint\limits_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

במקרה שלנו, $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ כלומר:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$$

ולכן:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \iint\limits_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \iint\limits_{D} 0dxdy = 0$$

ובסך הכל האינטגרל שווה ל־0.

2. חשבו את האינטגרל:

$$\int_\Gamma (\sin x + xy)dx + (x^2+3)dy$$

כאשר Γ היא היקף המשולש שקודקודיו הם הנקודות $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ בכיוון החיובי.

<u>פתרון:</u>

נחלק את Γ לשלוש מסילות שונות, שכל אחת מהן תתאר צלע: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

נחשב את האינטגרל על כל אחת מהצלעות בנפרד, לפי הנוסחה:

$$\int_C F \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

ונסכום את התוצאות.

פרמטריזציות של הצלעות תהיינה:

$$\gamma_1(t) = (1-t)(1,0) + t(0,1) = (1-t, t)$$
$$\gamma_2(t) = (1-t)(0,1) + t(-1,0) = (-t, 1-t)$$
$$\gamma_3(t) = (1-t)(-1,0) + t(1,0) = (2t-1, 0)$$

כאשר $t \in [0,1]$ בכל הפרמטריזציות. השדה הוקטורי הוא:

$$F(x,y) = (\sin x + xy, x^2+3)$$

עבור הצלע הראשונה, $\gamma_1'(t) = (-1,1)$, ומתקיים:

$$F(\gamma_1(t)) = (\sin(1-t) + t(1-t), (1-t)^2 + 3)$$

ולכן:

$$\int\limits_{\Gamma_1} = \int\limits_0^1 (\sin(1-t) + t(1-t), (1-t)^2 + 3) \cdot (-1, 1) dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (2t^2 - \sin(1-t) - 3t + 4) dt = \frac{1}{6}(4t^3 - 9t^2 + 24t)|_0^1 - \cos(1-t)|_0^1 = \frac{13}{6} + \cos 1$$

עבור הצלע השנייה, $\gamma_2'(t) = (-1, -1)$, ומתקיים:

$$F(\gamma_2(t)) = (\sin(-t) - t(1-t), (-t)^2 + 3) = (-\sin t + t^2 - t, t^2 + 3)$$

ולכן:

$$\int\limits_{\Gamma_2} = \int\limits_0^1 (-\sin t + t^2 - t, t^2 + 3) \cdot (-1, -1) dt = \int\limits_0^1 (\sin t + t - 2t^2 - 3) dt =$$

$$F(\gamma_2(t)) = (\sin(-t) - t(1-t), (-t)^2 + 3) = (-\sin t + t^2 - t, t^2 + 3)$$

ולכן:

$$\int\limits_{\Gamma_2} = \int\limits_0^1 (-\sin t + t^2 - t, t^2 + 3) \cdot (-1, -1) dt = \int\limits_0^1 (\sin t + t - 2t^2 - 3) dt =$$

$$= -\frac{1}{6}(4t^3 - 3t^2 + 18t)|_0^1 - \cos t|_0^1 = -\frac{13}{6} - \cos 1$$

ועבור הצלע השלישית, $\gamma_3'(t) = (2, 0)$ ומתקיים:

$$F(\gamma_3(t)) = (\sin(2t-1) + 0, (2t-1)^2 + 3)$$

ולכן:

$$\int\limits_{\Gamma_3} = \int\limits_0^1 (\sin(2t-1)+0,(2t-1)^2+3)\cdot(2,0) = \int\limits_0^1 2\sin(2t-1)dt = -\frac{2\cos(2t-1)}{2}|_0^1 = 0$$

ובסך הכל האינטגרל שלנו הוא:

$$\int\limits_{\Gamma} (\sin x + xy)dx + (x^2+3)dy = \int\limits_{\Gamma_1} + \int\limits_{\Gamma_2} + \int\limits_{\Gamma_3} = 0$$

3. מצאו את שטח הפנים של המשטח:

$$S = \{(x,y,z) : x = y^2+z^2-3, -2 \leq x \leq 1\}$$

<u>פתרון:</u>

ראשית נשנה מעט את הקואורדינטות - $t = x+3$ ונקבל:

$$S = \{(t,y,z) : t = y^2+z^2, 1 \leq t \leq 4\}$$

זהו חרוט קטום.

המשטח שלנו ניתן להטלה, כלומר פרמטריזציה שלו תהיה:

$$\phi(y,z) = (y^2+z^2,y,z)$$

ואנו יודעים שאלמנט השטח במקרה כזה הוא:

$$\|\phi_y \times \phi_z\| = \sqrt{1+t_y^2+t_z^2} = \sqrt{1+4z^2+4y^2}$$

כאשר $t(y,z) = y^2+z^2$. את שטח הפנים נחשב בעזרת הנוסחה:

$$\mu(S) = \iint\limits_S ds = \iint\limits_D \|\phi_y \times \phi_z\| \, dydz = \iint\limits_D \sqrt{1+4z^2+4y^2}dydz$$

נבטא את התחום D בקואורדינטות קוטביות:

$$y = r\cos\theta, z = r\sin\theta$$

במקרה שלנו, $1 \le t = y^2 + z^2 = r^2 \le 4$ ולכן $1 \le r \le 2$.

כמו כן, $0 \le \theta \le 2\pi$ והיעקוביאן הוא r, ולכן:

$$\iint\limits_D \sqrt{1+4z^2+4y^2}dydz = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{1+4r^2}rdrd\theta = \frac{2\pi}{8}\int_1^2 \sqrt{1+4r^2}8rdr =$$

$$\frac{2\pi}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}|_1^2 = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$$

4. חשבו את האינטגרל:

$$\iint\limits_S x^2dydz + ydzdx + zdxdy$$

כאשר $S = \{x^2+y^2 \le (z-1)^2, 0 \le z \le 1\}$ עם נורמל חיצוני.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו ניתן להטלה: $z = -\sqrt{x^2+y^2}+1$. אנו בוחרים את השורש השלילי, כי $0 \le z \le 1$.

אם כן, הנורמל הוא:

$$\phi_x \times \phi_y = (-z_x, -z_y, 1) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)$$

כאשר הפרמטריזציה היא $\phi(x,y) = (x, y, -\sqrt{x^2+y^2}+1)$.

השדה הוקטורי הוא: $F(x,y,z) = (x^2, y, z)$, לכן:

$$F(\phi(x,y)) = (x^2, y, -\sqrt{x^2+y^2}+1)$$

ולכן האינטגרל יהיה:

$$\iint\limits_S x^2dydz + ydzdx + zdxdy = \iint\limits_D F(\phi(x,y)) \cdot (\phi_x \times \phi_y)dxdy =$$

$$\iint\limits_D (x^2, y, -\sqrt{x^2+y^2}+1) \cdot (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (\frac{x^3+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2}+1)dxdy$$

נציג את התחום D בקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

כאשר $0 \le \theta \le 2\pi$ ו־$0 \le r \le 1$. היעקוביאן הוא r ולכן:

$$= \iint\limits_D = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2} r^2\cos^3\theta + r\sin^2\theta - r + 1)rdrd\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}(\frac{r^3\cos^3\theta}{3} + \frac{r^2\sin^2\theta}{2} - \frac{r^2}{2} + r)|_{r=0}^{r=1}d\theta = \int\limits_0^{2\pi}(\frac{\cos^3\theta}{3} + \frac{\sin^2\theta}{2} + \frac{1}{2})d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\frac{(1-\sin^2\theta)\cos\theta}{3}d\theta + \int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{4}d\theta + \pi = \frac{3\pi}{2} + (-\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} - \frac{\sin 2\theta}{8})|_0^{2\pi}$$

ולכן בסה"כ האינטגרל הוא $\frac{3\pi}{2}$.

5. מצאו את נפח הגוף:

$$V = \{(x,y,z) : x^2 + z^2 = (4-y)^2, 0 \le y \le 1\}$$

פתרון:

בעזרת משפט הדיברגנץ, אפשר לחשב נפח ע"י הנוסחה:

$$\frac{1}{3}|\iint\limits_V xdydz + ydxdz + zdxdy|$$

במקרה שלנו, המשטח ניתן להטלה: $y = 4 - \sqrt{x^2+z^2}$. לכן:

$$\phi_x \times \phi_z = (-y_x, 1, -y_z) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}})$$

כאשר הפרמטריזציה היא: $\phi(x,z) = (x, 4-\sqrt{x^2+z^2}, z)$.

השדה הוקטורי הוא: $F(x,y,z) = (x,y,z)$. לכן:

$$F(\phi(x,z)) = \phi(x,z) = (x, 4-\sqrt{x^2+z^2}, z)$$

ולכן הנפח הוא:

$$\frac{1}{3}\iint\limits_D (x, 4-\sqrt{x^2+z^2}, z)\cdot(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, 1\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}})dxdz =$$

$$= \frac{1}{3}\iint\limits_D (\frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+z^2}} + 4 - \sqrt{x^2+z^2})dxdz = \frac{4}{3}\iint\limits_D dxdz$$

מהו התחום D? אם נעבור לקואורדינטות קוטביות,

$$x = r\cos\theta, z = r\sin\theta$$

נקבל $0 \le \theta \le 2\pi$ וגם: $r^2 = (4-y)^2$ ומכיוון ש$0 \le y \le 1$, נקבל: $3 \le r \le 4$.

כלומר, התחום D הוא טבעת, בין מעגל עם רדיוס 4 למעגל עם רדיוס 3.

האינטגרל על התחום D מחשב את שטחו, כלומר:

$$\frac{4}{3}\iint\limits_D dxdz = \frac{4}{3}(16\pi - 9\pi) = \frac{28\pi}{3}$$

וזהו הנפח.

6. בעזרת משפט סטוקס, חשבו את האינטגרל:

$$\int\limits_{\Gamma}(2y+x^2)dx+(z-2x+y)dy-(x+3z)dz$$

כאשר $\Gamma=\{(x,y,z): x^2+y^2=4, z=2\}$ בכיוון החיובי.

<u>פתרון:</u>

משפט סטוקס אומר:

$$\int\limits_{\Gamma}F\cdot d\vec{r}=\iint\limits_{S}curlF\cdot\vec{n}dS$$

במקרה שלנו:

$$F=(P,Q,R)=(2y+x^2, z-2x+y, -x-3z)$$

ולכן:

$$curlF=(0-1, 0-(-1), -2-2)=(-1,1,-4)$$

המשטח S הוא עיגול במישור $z=2$ עם רדיוס 2 ומרכז בנקודה $(0,0,2)$.

נורמל למשטח הוא $(0,0,1)$. לכן:

$$\iint\limits_{S}curlF\cdot\vec{n}dS=\iint\limits_{S}(-1,1,-4)\cdot(0,0,1)dS=-4\iint\limits_{S}dS=-16\pi$$

מכיוון שהאינטגרל מחשב את שטחו של S, שהוא עיגול.