

מבחן באנליזה מודרנית 1

מועד א'

ענו על כל השאלות הבאות. כל הגדרה או ציטוט שווה 7 נקודות, וכל הוכחה שווה 12 נקודות. חומר עזר אסור. משך הבחינה שלוש שעות. בהצלחה!

1. א. הגדירו את המידה החיצונית של לבג על \mathbb{R}
ב. הגדירו פונקציות מדידות לבג על \mathbb{R} .
ג. הגדירו פונקציות רציפות בהחלט $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
ד. צטטו את החצי השני של המשפט היסודי של חשבון אינטגרלי, בגירסת לבג.
ה. הוכיחו שאם f ו- g רציפות בהחלט ב- $[a, b]$ אז אפשר לקיים אינטגרציה בחלקים ביחס למידת לבג dm :

$$\int_{[a,b]} fg' dm = fg \Big|_a^b - \int_{[a,b]} f' g dm$$

2. א. צטטו את משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג.
ב. צטטו את משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג.
ג. צטטו את למת פאטו.
ד. יהי (X, S, u) מרחב מידה חיובית ותהי $f: X \rightarrow [0, \infty]$ פונקציה אינטגרבילית du . תהי סדרה יורדת של פונקציות מדידות- S כך שלכל $x \in X$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, הוכיחו ש- $\int_X f du = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n du$ אמ"ם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- f_n אינטגרבילית du .

3. א. הגדירו מרחבי $L^p(du)$, $1 \leq p \leq \infty$
ב. צטטו את אי שוויון הולדר במקרה $1 < p < \infty$.
ג. יהי (X, S, u) מרחב מידה חיובית ותהי $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ סדרת פונקציות ב- $L^1(du)$ כך שלכל $x \in X$ קיים גבול $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. הוכיחו ש- $f_n \rightarrow f$ ב- $L^1(du)$ אמ"ם $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| du = \int_X |f| du$.

- ד. נגדיר $T: C([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י $T(f) = f(0)$. הוכיחו שאם נגדיר על $C([0,1])$ את הנורמה הרגילה, אז T רציף, אבל אם נגדיר על $C([0,1])$ את נורמת L^2 ביחס למידת לבג, אז T לא רציף.