אלגברה מופשטת 1, תרגיל בית 10

מתרגלים: סולי וישקאוצן ואדם צ'פמן. להגשה ב15.1 או ב18.1 בהתאם לשיעור התרגיל.

הגדרה: חבורה נקראת **פשוטה** אם אין לה תת-חבורות נורמליות לא טריוויאליות.

1) הוכח כי כל חבורה מסדר ראשוני היא פשוטה וציקלית ומצא את הסדר של האיברים שלה.
2) הוכח כי כל חבורה אבלית מסדר לא ראשוני אינה פשוטה.
3) תהי חבורה מסדר ראשוני G ויהי איבר $g \in G$. מצאו מהו המסלול של g ומהו המייצב שלו כאשר פעולת החבורה על עצמה $\varphi : G \to S(G)$ היא.
   a. $\varphi(g) = \pi$ כך ש$\pi(x) = gx$ לכל $x \in G$.
   b. $\varphi(g) = \pi$ כך ש$\pi(x) = gxg^{-1}$ לכל $x \in G$.
4) הוכח כי A_5 [=חבורת התמורות הזוגיות בחמישה איברים] פשוטה.
   [הדרכה: רשום את מבנה המחזורים האפשרי לאיברים בA_5. הנח בשלילה כי קיימת $K \lhd A_5$. כך איבר כלשהו $x \in K$. מכיוון שK נורמלית, אז היא מכילה את כל האיברים ששייכים למחלקת הצמידות של x. השתמשו בזה כדי להגיע לסתירה. תזכורת: A_n תמיד נוצרת ע"י המחזורים מאורך 3. מומלץ לקרוא את מערך תרגול כיתה 9 כפי שהועלה לאתר שכולל תרגילים דומים]
5) הוכח או הפרך: $G / Z(G)$ אבלית אזי G אבלית. [תזכורת: $Z(G)$ זה המרכז של G, כלומר קבוצת כל האיברים שמתחלפים עם כל האיברים ב G]