תרגיל 13- פתרון

בשאלות הבאות השתמשו בהגדרת טורים, בתנאי להתכנסות, ובמבחני ההשוואה

1. קבעו התכנסות של הטורים הבאים:

(א)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

(ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3n+4}}$$

(ג)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+n^2}$$

(ד)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-3n}$$

פתרון:

(א) ברור כי $\sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n^n} = n$ ולכן $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{1}{n}$. כיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, נקבל כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

(ב)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3n+4}} = 1$$

כלומר תנאי הכרחי להתכנסות לא מתקיים, ולכן הטור מתבדר.

(ג) $\frac{1}{3^n+n^2} < \frac{1}{n^2}$ ולכן ממשפט ההשוואה, הטור מתכנס.

(ד) נשתמש במבחן ההשוואה עם $\frac{1}{n^2}$.

לכל $n \geq 4$ מתקיים:

$$n^2 - 3n = n^2\left(1 - \frac{3}{n}\right) \geq n^2 \cdot \frac{1}{4} \implies \frac{1}{n^2-3n} \leq \frac{4}{n^2}$$

וכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, נקבל כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-3n}$ מתכנס, לפי מבחן ההשוואה.

2. מצאו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

רמז : הסתכלו על סדרת הסכומים החלקיים, ונסו להציג אותה כטור טלסקופי

ב) נסמן

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{n+2}{(n+1)(n+2)}-\frac{n+1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{N+2}=S_N$$

נשאיף N ל-∞ ונקבל

$$\lim_{N\to\infty}S_N=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}-\frac{1}{N+2}=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}$$

3. קבעו התכנסות או התבדרות של הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+3)!}$

3) א)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)$$

והאיבר הכללי אינו שואף ל-0 לכן הטור מתבדר

ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+3)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

לכל n מתקיים

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\leq\frac{1}{n^3}$$

הטור $\sum\frac{1}{n^3}$ מתכנס

ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון גם הטור

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+3)!}$ מתכנס

<u>בשאלות הבאות השתמשו במבחני התכנסות (מבחן השורש - קושי, המנה - דלמבאר, לייבניץ,...)</u>

4. האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט / בתנאי / מתבדרים :

א) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

<u>פיתרון:</u>

נבדוק התכנסות בהחלט: נקבל את הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. נבדוק לפי מבחן העיבוי, את התכנסות הטור $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln(2^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(2^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(2)} =$ $\frac{1}{\ln(2)} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, שמתבדר כקבוע כפול הטור ההרמוני שמתבדר. לכן הטור שלנו לא מתכנס בהחלט.

התכנסות בתנאי:

נשים לב שהסדרה מונוטונית: $\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{n \ln n}$, ומתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$, והטור הנתון מחליף סימן, ולכן לפי מבחן לייבניץ הטור מתכנס בתנאי.

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi n}+1}$

<u>פיתרון:</u>

קל לוודא ש

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}+1}$$

מונוטונית יורדת ומתכנסת ל 0. לכן, לפי מבחן לייבניץ הטור מתכנס בתנאי.
כעת נבדוק האם הטור עם ערך מוחלט מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}+1}$$

נשים לב ש

$$\sqrt{\pi n}+1 \leq 4\sqrt{n}$$

ולכן

$$\frac{1}{4\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}+1}$$

היות ש

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{n}}$$

הוא טור מתבדר, גם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}+1}$$

מתבדר. לסיכום: הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi n}+1}$$

מתכנס בתנאי ולא בהחלט.

(ג) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$

פיתרון:

נבדוק מבחן השוואה:

$$\frac{1}{\ln(n!)} \geq \frac{1}{\ln(n^n)} = \frac{1}{n\ln n}$$

וראינו בסעיף א שהטור הימני מתבדר (לפי מבחן העיבוי), ולכן הטור שלנו גם מתבדר.

(ד) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{\sqrt{n^4-3n^2}}$

פיתרון:

הטור שלנו הוא בעצם

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n}{\sqrt{n^2-3}}$$

ברור כי $\frac{2}{\sqrt{n^2-3}}$ היא סדרה מונוטונית יורדת המתכנסת ל 0. ולכן לפי לייבניץ הטור מתכנס. נבדוק התכנסות של הטור עם ערך מוחלט

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2-3}}$$

נשים לב ש

$$\sqrt{n^2-3} \leq \sqrt{n^2} = n$$

ולכן

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2-3}}$$

היות שהטור

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

מתבדר.גם הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-3}}$$

מתבדר. ולכן הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{\sqrt{n^4-3n^2}}$$

מתכנס בתנאי.

(ה) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{5777}}{(\ln \pi)^n}$

פיתרון:

נשים לב שהו טור חיובי. נשתמש במבחן קושי

$$\sqrt[n]{\frac{n^{5777}}{(\ln \pi)^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^{5777}}{\ln \pi} \to \frac{1}{\ln \pi} < 1$$

ולכן הטור מתכנס.

(ו) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)^n}{n!}$ עבור $a \in \mathbb{R}$

פיתרון:

נשים לב שאם $a = -1$ הטור בוודאי מתכנס בהחלט, לכן ניתן להניח ש $a \neq -1$ ולהשתמש במבחן דאלאמבר

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{\frac{|a+1|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a+1|^n}{n!}} = \frac{|a+1|}{n+1} \to 0$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט.

(ז) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^n}$

פיתרון:

נשתמש במבחן קושי

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln \ln n)^n}} = \frac{1}{\ln \ln n} \to 0 < 1$$

ולכן הטור מתכנס.

(ח) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n-1)}$

פיתרון: