פתרון תרגיל 2

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$:

$$1^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}$$

והטענה אכן נכונה.
נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ מסוים:

$$1^2+2^2+\cdots+k^2 = \frac{k\left(k+1\right)\left(2k+1\right)}{6}$$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, כלומר:

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+\left(k+1\right)^2 = \frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(2k+3\right)}{6}$$

אם כן:

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+\left(k+1\right)^2 = \frac{k\left(k+1\right)\left(2k+1\right)}{6}+\left(k+1\right)^2$$

לפי הנחת האינדוקציה. כעת, נוציא גורם משותף:

$$=\left(k+1\right)\left(\frac{k\left(2k+1\right)}{6}+k+1\right)=\left(k+1\right)\left(\frac{2k^2+k+6k+6}{6}\right)=$$

$$=\frac{\left(k+1\right)\left(2k^2+7k+6\right)}{6}=\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(2k+3\right)}{6}$$

כנדרש.

2. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$:

$$1\cdot2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)}{3}$$

והטענה אכן נכונה.
נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ מסוים:

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+k\left(k+1\right)=\frac{k\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{3}$$

ונניח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, כלומר:

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+k\left(k+1\right)+\left(k+1\right)\left(k+2\right)=\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)}{3}$$

אם כן:

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+k\left(k+1\right)+\left(k+1\right)\left(k+2\right)=\frac{k\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{3}+\left(k+1\right)\left(k+2\right)$$

לפי הנחת האינדוקציה. כעת, נוציא גורם משותף:

$$=\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(\frac{k}{3}+1\right)=\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)}{3}$$

כנדרש.

3. יש להראות באינדוקציה שמתקיים:

$$1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$$

נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$:

$$1=1^2$$

והטענה אכן נכונה.
נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ אי-זוגי מסוים:

$$1+3+5+\cdots+2k-1=k^2$$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, המספר האי-זוגי הבא, כלומר:

$$1+3+5+\cdots+2k+1+2k+1=\left(k+1\right)^2$$

המספר האי-זוגי הבא אחרי $2k-1$ הוא $2k+1$. אם כן:

$$1+3+5+\cdots+2k-1+2k+1=k^2+2k+1$$

לפי הנחת האינדוקציה. כעת, קל לראות שמתקיים:

$$=\left(k+1\right)^2$$

כנדרש.

4. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$:

$$1^3-1=0$$

והמספר אכן מתחלק ב-3.
נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ מסוים, כלומר המספר k^3-k מתחלק ב-3, ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$: המספר $\left(k+1\right)^3-\left(k+1\right)$ מתחלק ב-3.
אם כן, נפתח את הסוגריים:

$$\left(k+1\right)^3-\left(k+1\right)=k^3+3k^2+3k+1-k-1=\left(k^3-k\right)+3\left(k^2+k\right)$$

המחובר הימני מתחלק ב-3 מכיוון שהוא כפולה של 3; המחובר השמאלי מתחלק ב-3 לפי הנחת האינדוקציה.
סה"כ המספר שלנו הוא סכום של מספרים שמתחלקים ב-3 ולכן גם הוא מתחלק ב-3, כנדרש.

5. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 5$ (במקרה שלנו זהו השלב הראשון):

$$2^5 > 5^2$$

והטענה אכן נכונה.
נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$ מסוים:

$$2^k > k^2$$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 1$:

$$2^{k+1} > (k+1)^2$$

אם כן:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2$$

לפי הנחת האינדוקציה. כעת, נראה שמתקיים: $k^2 > 2k + 1$.
נתבונן בפונקציות: $f(x) = x^2, g(x) = 2x + 1$. כאשר $x > 0$, הפונקציות עולות.
הפונקציות נחתכות כאשר $x^2 = 2x+1$, כלומר: $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$, ובתחום $x > 0$ נקבל את הנקודה $1 + \sqrt{2}$.
לכל $k > 1 + \sqrt{2}$ הפונקציה f נמצאת מעל הפונקציה g, ובפרט לכל $k \geq 5$ טבעי מתקיים: $k^2 > 2k + 1$.
נחזור להוכחה שלנו:

$$2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

כנדרש.
*את הטענה $k^2 > 2k + 1$ היה אפשר להוכיח באמצעות אינדוקציה נוספת.

6. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 1$:

$$5^1 - 1 = 4$$

והמספר אכן מתחלק ב־4.
נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$ מסוים, כלומר המספר $5^k - 1$ מתחלק ב־4, ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 1$, כלומר המספר $5^{k+1} - 1$ מתחלק ב־4.
אם כן:

$$5^{k+1} - 1 = 5 \cdot 5^k - 1 = (1+4) \cdot 5^k - 1 = 5^k + 4 \cdot 5^k - 1 = \left(5^k - 1\right) + 4 \cdot 5^k$$

המחובר הימני מתחלק ב־4 כי הוא כפולה של 4 והמחובר השמאלי מתחלק ב־4 לפי הנחת האינדוקציה.
סה"כ המספר שלנו הוא סכום של מספרים שמתחלקים ב־4 ולכן גם הוא מתחלק ב־4, כנדרש.

7. (א) נוכיח באינדוקציה. עבור $n = 0$ נקבל:

$$a_0 = 17 > 1$$

והטענה אכן נכונה.
נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$ מסוים, כלומר: $a_k > 1$, ונוכיח שהטענה נכונה

עבור $n=k+1$, כלומר $a_{k+1}>1$.
אם כן, אנו יודעים מהנחת האינדוקציה שמתקיים: $a_k>1$. נעלה בריבוע ונקבל $a_k^2>1$. נוסיף לכל האחד מהאגפים a_k^2 ונקבל $2a_k^2>1+a_k^2$. נחלק בביטוי $1+a_k^2$ ונקבל:

$$\frac{2a_k^2}{a_k^2+1}>1$$

לפי נוסחת הנסיגה, קיבלנו $a_{k+1}>1$ כנדרש.

(ב) נוכיח באינדקוציה. עבור $n=0$ נקבל:

$$a_0=17, a_1=\frac{2\cdot 17^2}{17^2+1}\Longrightarrow a_0>a_1$$

והטענה נכונה.
נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ מסוים, כלומר: $a_k>a_{k+1}$ ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$: $a_{k+1}>a_{k+2}$.
מספיק להראות שמתקיים: $\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}>1$. אם כן, לפי נוסחת הנסיגה:

$$\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}=\frac{\frac{2a_k^2}{a_k^2+1}}{\frac{2a_{k+1}^2}{a_{k+1}^2+1}}=\frac{2a_k^2\left(a_{k+1}^2+1\right)}{2a_{k+1}^2\left(a_k^2+1\right)}=\frac{2a_k^2a_{k+1}^2+2a_k^2}{2a_{k+1}^2a_k^2+2a_{k+1}^2}$$

מהנחת האינדוקציה, $a_k>a_{k+1}$ ולכן:

$$\frac{2a_k^2a_{k+1}^2+2a_k^2}{2a_{k+1}^2a_k^2+2a_{k+1}^2}>\frac{2a_k^2a_{k+1}^2+2a_{k+1}^2}{2a_{k+1}^2a_k^2+2a_{k+1}^2}=1$$

ואכן $\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}>1$ כנדרש.

8. (א) עבור $n=1$ נקבל: $\frac{1}{2}$. עבור $n=2$ נקבל: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. עבור $n=3$ נקבל: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. עבור $n=4$ נקבל: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$.
אנו רואים שעבור $n=k$ אנו מקבלים $\frac{k}{k+1}$. אם כן, נשער שהנוסחה היא:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\frac{n}{n+1}$$

(ב) כבר בסעיף הקודם ראינו שהטענה נכונה עבור $n=1$.
נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ מסוים:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k\left(k+1\right)}=\frac{k}{k+1}$$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, כלומר:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k\left(k+1\right)}+\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}=\frac{k+1}{k+2}$$

אם כן:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k\left(k+1\right)}+\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}$$

לפי הנחת האינדוקציה. כעת, נבצע מכנה משותף:

$$\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

כנדרש.