חישובי מסה

20 ביוני 2018

ככלל, כשאנו רוצים לחשב מסה של אובייקט עם פונקציית צפיפות ρ, אנחנו צריכים לחשב את האינטגרל המתאים של ρ על האובייקט – אם זה חוט/תיל וכו' אז אינטגרל קווי מסוג ראשון, אם זה משטח אז אינטגרל משטחי מסוג ראשון, אם זה גוף אז אינטגרל משולש.

נדגים.

1. **מסה של עקומה** (חוט, תיל וכיוצא באלה)**:**

נניח שחוט מתואר ע"י העקומה C, והמסה ליחידת אורך של החוט, הצפיפות, היא פונקציה רציפה ρ.

אזי, אפשר לחשב את מסת החוט ע"י הנוסחה:

$$m = \int_C \rho ds$$

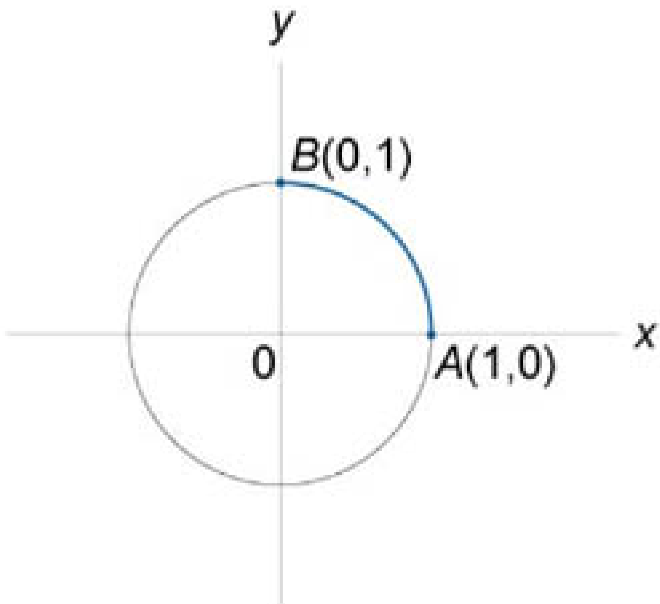
<u>לדוגמה:</u>

מצאו את מסת החוט לאורך קשת המעגל $x^2 + y^2 = 1$ מהנקודה $A(1,0)$ לנקודה $B(0,1)$, כאשר הצפיפות נתונה ע"י הפונקציה:

$$\rho(x,y) = xy$$

<u>פתרון:</u>

החוט שלנו הוא:



פרמטריזציה מתאימה היא: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ כאשר $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. נקבל:

$$\|\gamma'(t)\| = \|(-\sin t, \cos t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

לכן המסה היא:

$$m = \int_C \rho ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{1}{4} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

2. **מסה של משטח:**

יהי S משטח, שצפיפותו נתונה ע"י פונקציה רציפה $\rho(x,y,z)$.

המסה של S נתונה ע"י הנוסחה:

$$m = \iint_S \rho(x,y,z) dS$$

לדוגמה:

מצאו את מסת הגליל הנתון ע"י הפרמטריזציה:

$$\phi(u,v) = (a\cos u, a\sin u, v)$$

כאשר $u \in [0,2\pi], v \in [0,H]$, וצפיפותו נתונה ע"י: $\rho(x,y,z) = z^2(x^2+y^2)$.

פתרון:

נחשב את אלמנט השטח. וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_u = (-a\sin u, a\cos u, 0), \phi_v = (0,0,1)$$

לכן:

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin u & a\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a\cos u, a\sin u, 0)$$

ואם כן:

$$\|\phi_u \times \phi_v\| = \sqrt{a^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u} = a$$

כמו כן:

$$\rho(\phi(u,v)) = v^2(a^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u) = a^2v^2$$

ולכן:

$$m = \iint\limits_S \rho(x,y,z)dS = \iint\limits_D a^2v^2advda = a^3\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^H vdvdu = 2\pi a^3 \cdot \frac{v^3}{3}|_0^H = \frac{2\pi a^3H^3}{3}$$

3. **מסה של גוף:**

יהי G גוף עם פונקציית צפיפות ρ, אזי **המסה** של G מוגדרת על ידי:

$$m=\iiint\limits_{G}\rho\left(x,y,z\right)dxdydz$$

<u>לדוגמה:</u>

חשבו את המסה של כדור B ברדיוס R שצפיפותו ρ פרופורציונאלית למרחק מהמרכז בריבוע, כלומר $\rho=ar^2$ (השתמשו בקואורדינטות כדוריות).

<u>פתרון:</u>

אם כן, בקואורדינטות היעקוביאן הוא $r^2\sin\theta$ ולכן:

$$m=\iiint\limits_{B}ar^2\cdot r^2\sin\theta drd\phi d\theta=a\iiint\limits_{B}r^4\sin\theta drd\phi d\theta$$

בקואורדינטות כדוריות, $(r,\theta,\phi)\in[0,R)\times[0,\pi)\times[0,2\pi)$ ולכן:

$$=a\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R}r^4\sin\theta drd\phi d\theta=a\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin\theta\cdot\left(\frac{r^5}{5}\right)\Big|_{r=0}^{r=R}=\frac{aR^5}{5}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin\theta d\phi d\theta$$

$$=\frac{2\pi aR^5}{5}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta=\frac{4a\pi R^5}{5}$$