

1. תהי $f: R^2 \times R^2 \rightarrow R$ תבנית בילינארית נתונה ע"י $f(X, Y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 3x_2 y_2$.
 א. הצג את f בכתיב מטריצה לפי הבסיס הסטנדרטי

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ב. עבור $q(v) = f(v, v)$ הצג את q במטריצה סימטרית

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס הסטנדרטי לבסיס $w = \{w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ד. השתמש בה ע"מ למצוא את f בכתיב מטריצה לפי הבסיס W

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}$$

ה. הצג את q במפורש לפי הבסיס W

$$f(X', Y') = 9x'_1 y'_1 + 3x'_1 y'_2 - 7x'_2 y'_1 + 3x'_2 y'_2$$

2. עבור התבניות הריבועיות הבאות:

- מצא מטריצה מייצגת סימטרית,
- מצא תצוגה לפי ריבועים ואת המטריצה המייצגת האלכסונית שלה,
- קבע את המטריצה האלכסונית המייצגת מהצורה $\begin{pmatrix} I & & \\ & -I & \\ & & 0 \end{pmatrix}$,
- קבע את השניוניות של התבניות הריבועיות.

א. $4x^2 + 12xy + 8y^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$4x^2 + 12xy + 8y^2 = (2x + 3y)^2 - y^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{שני ישרים } d = 0 \wedge \text{היפרבולה}$$

אכן:

$$\{(x', y') : x'^2 - y'^2 = 0\} = \{x' - y' = 0\} \cup \{x' + y' = 0\}$$

ב. $x^2 + xy + y^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{אליפסה}$$

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = 2 \quad .ג$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{שני ישרים}$$

אכנ:

$$x^2 - 2 = (x' - \sqrt{2})(x' + \sqrt{2})$$

ד. הת"ר המיוצגת ע"י $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ בבסיס הסטנדרטי, עבור $d=3$.

$$4x_1x_2 = 3$$

$$4x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{היפרבולה}$$