

תרגיל בית 2 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1. למי שרוצה להתנסות בעוד משחק של בניית בסרגל ומחוגה מוזמן לנסות את המשחק Euclidean. זה מספיק ממכר שכדאי לוודא שנשאר זמן לשאר תרגיל הבית.

שאלה 2. הוכיחו כי ניתן לבנות מצולע משוכלל עם n צלעות אם ורק אם המספר $\cos \frac{2\pi}{n}$ בר-בנייה. רמז עבה: מצולע משוכלל החסום במעגל היחידה.

שאלה 3. תהי K/F הרחבת שדות. נתבונן בחוג הפולינומים $K[x]$ ובשדה הפונקציות הרציונליות $F(x)$, ונחשוב על שניהם כתת-קבוצות של $K(x)$. הוכיחו $F(x) \cap K[x] = F[x]$.

שאלה 4. תהי K/F הרחבת שדות. יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום מדרגה $n \geq 1$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם a איבר אלגברי מעל K אז הוא אלגברי מעל F .

ב. אם a איבר אלגברי מעל F אז הוא אלגברי מעל K .

ג. אם a איבר אלגברי מעל F אז גם $\alpha \cdot a$ הוא אלגברי לכל $\alpha \in F$.

שאלה 5. תהי K/F הרחבה סופית (כלומר $[K : F] < \infty$). הוכיחו כי כל איבר של K הוא אלגברי מעל F . רמז: חשבו על הקבוצה $\{1, a, a^2, a^3, \dots\}$. רשות: להרחבה כמו בשאלה קוראים הרחבה אלגברית. האם כל הרחבה אלגברית היא סופית?

שאלה 6. הוכיחו כי $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

שאלה 7. יהי F שדה, ותהי $G \leq F^*$ תת-חבורה סופית של החבורה הכפלית של השדה. הוכיחו כי G ציקלית. הדרכה: העזרו בתורת המבנה של חבורות אבליות סופיות ובחישוב $\exp(G)$.

בהצלחה!