

תרגיל 5

1. יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $A, B, C \subseteq X$ תתי קבוצות כך ש $C \subseteq A \cup B$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) אם C פתוחה ב $A \cup B$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B .

(ב) אם $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B אז C פתוחה ב $A \cup B$.

2. (א) יהי X מרחב טופולוגי. ניקח תתי קבוצות $Z \subseteq Y \subseteq X$. הטופולוגיה של X משרה טופולוגיות תת מרחב על Y וזו משרה טופולוגית תת מרחב על Z . הראו שזו בדיוק טופולוגית תת המרחב ש X משרה על Z (אם הטענה הזאת הייתה לא נכונה היה מאוד קשה לדבר על תתי מרחבים).

(ב) הוכיחו כי טופולוגית תת מרחב של טופולוגיה קו-סופית היא בעצמה טופולוגיה קו-סופית.

3. תהי $f : X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה, ויהי $A \subseteq X$. הוכיחו ש $f|_A : A \rightarrow Y$ רציפה.

4. נניח ש $X = C_1 \cup \dots \cup C_n$ איחוד סופי של קבוצות סגורות. ונניח שיש $f_i : C_i \rightarrow Y$ פונקציות רציפות שמזדהות על החיתוך. כלומר, לכל $i, j \in I$ מתקיים $f_i|_{C_i \cap C_j} = f_j|_{C_i \cap C_j}$. אז הפונקציה $f : X \rightarrow Y$ שמוגדרת ע"י הפונקציות f_i רציפה (באופן הבא: יהי $x \in X$. אז x שייך לאיזשהו C_i ואז נגדיר $f(x) = f_i(x)$. שימו לב שהפונקציה מוגדרת היטב. באופן שקול ופורמלי אפשר להגדיר $f = \cup_{i \in I} f_i$).

5. איזה תכונות הפרדה מקיים המרחב הבא?
 (\mathbb{N}, τ) כאשר $\tau = \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\mathbb{N}, \emptyset\}$ ו $O_n = \{1, \dots, n\}$.

6. הוכיחו כי T_2 הוא תורשתי. כלומר, יהא (X, τ) מ"ט T_2 הוכיחו כי כל תת מרחב $Y \subseteq X$ הוא גם T_2 .

7. יהא (X, τ) מ"ט בעל תכונה T_2 . תהא $\tau \subseteq \tau'$ טופולוגיה נוספת על X . הוכיחו כי (X, τ') גם כן T_2 .

8. בתרגיל זה נוכיח כי כל מ"מ (X, d) הוא T_4 . יהא (X, d) מ"מ ויהיו S_1, S_2 קבוצות סגורות זרות.

(א) לכל $x \in S_1$ הוכיחו כי $d(x, S_2) > 0$

(ב) לכל $x \in S_1$ נגדיר $r_x = \frac{d(x, S_2)}{2}$ ונגדיר $V_1 = \cup_{x \in S_1} B(x, r_x)$. באופן דומה, לכל $y \in S_2$ נגדיר $r_y = \frac{d(y, S_1)}{2}$ ונגדיר $V_2 = \cup_{y \in S_2} B(y, r_y)$. ברור כי V_1, V_2 פתוחות וזרות ו $S_i \subseteq V_i$. הוכיחו כי V_1, V_2 זרות וזה יסיים את ההוכחה כי (X, d) הוא T_4 .

9. נראה מרחב שהוא T_2 אינו T_3 . נתבונן ב \mathbb{R} ובתת קבוצה שלו $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. נגדיר $\mathbb{C}\mathbb{L}$ את קבוצת הקבוצות הסגורות ב \mathbb{R} לפי המטריקה האוקלידית. ונגדיר $\{C = A \cup T \mid A \in \mathbb{C}\mathbb{L}, T \subseteq S\}$ להיות כל קבוצת כל המשלימים של קבוצות אלו. תאמינו לנו, τ יוצאת טופולוגיה.

(א) נאפיין את הקבוצות הפתוחות: הוכיחו כי $O \in \tau \iff O = B \cap R$ כאשר B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו $S^c \subseteq R$.

(ב) הוכיחו ש τ מכילה את הטופולוגיה האוקלידית, והסיקו ש (\mathbb{R}, τ) הוא האוסדורף.

(ג) הראו שאם $O \in \tau$ כך ש $S \subseteq O$, אז O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.

(ד) הוכיחו שלא קיימות U, V פתוחות ב τ וזרות כך ש $U, S \subseteq V$ ו $0 \in U$. הסיקו ש (\mathbb{R}, τ) אינו T_3 .