הרצאה XI- אינפי 1

דוגמא: $\sum \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$, מתי הוא מתכנס? כאשר $x,\alpha \in R$.

הוא מתכנס בהחלט כאשר: $\sum \left|\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right| \le \sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ כאשר $\alpha > 1$ הוא מתכנס בהחלט. ולכן גם מתכנס.

כעת נתבונן במקרה $0 < \alpha \le 1$: עי״פ מבחן דריכלה אם $a_n \searrow$ ו$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסומה (או שהסכומים החלקיים שלהם חסומים) אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס. ידוע ש$a_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$ יורדת מונוטונית לאפס, ולכן נותר להוכיח שהסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסומים. זאת אומרת, צריך להוכיח כי קיים C כך ש$|\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx| = |\sum_{k=1}^{n} \sin kx| \le C$.

ברור שמתקיים: $\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin\frac{x}{2}$.

וגם באופן כללי מתקיים: $\sin kx \cdot \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]$.

לכן: $\sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{2}x - \cos\frac{3}{2}x + \cos\frac{3}{2}x - \cdots - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$

מכאן נובע $\sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$.

1. $\sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pi k \to x = 2\pi k \to \sum_{k=1}^{n} \sin kx = 0$.
2. $\sin\frac{x}{2} \ne 0 \to \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\left[\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}$

ומכאן נובע כי מתקיים $\sin\frac{x}{2} \le \left|\frac{\left[\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \ge \sum_{k=1}^{n} \sin kx$. לכן הסדרה חסומה. והוכחנו כי הטור מתכנס בהחלט, ולכן גם מתכנס.

<u>הקבצת איברים (Grouping Terms)</u>:

דוגמא למקרה בו אין אפשר לקבץ: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = (1-1) + (1-1) + \cdots = 1 + (-1+1) + \cdots = 0 = 1$.

<u>משפט</u>: $(A)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ וגם $n_k \nearrow$ ונגדיר: $(\tilde{A}) := (a_1 + \cdots + a_{n_1}) + \cdots + (a_{n_{k-1}} + \cdots + a_{n_k})$. אם A מתכנס, $(\tilde{A})$ מתכנס.

הוכחה: $\tilde{A}_m = \sum_{k=1}^{n} a_{n_{k-1}} + \cdots + a_{n_k} = \sum_{s=1}^{n_m} a_s = A_{n_m}$ ואם $A_n \longrightarrow S$ גם $A_{m_n} \longrightarrow S$.

תרגיל בית: הוכח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נתון שa_n שואף לאפס, וגם ש$\exists C \ge 0 :\ge |n_{k+1} - n_k| \le C$ אם $\tilde{A}$ מתכנס אז גם A מתכנס.

<u>תמורת איברים</u>:

דוגמא: $\ln 2 \underbrace{=}_{\text{נוכיח בהמשך}} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = S$. נסדר את הטור כך: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots = S$.

נסדר את הטור ונקבל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}S$ בסתירה.. מתי כן מותר לבצע התמרה?

נתון טור $(A)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ והעתקה $\sigma : \mathrm{N} \to N$ חח״ע ועל, $(A')\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ נקרא לה תמורה של A.

משפט: אם הטור חיובי, אז אם A מתכנס גם A' מתכנס וגם $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

הוכחה: A מתכנס לכן $\exists C \geq 0\ \forall n: \ \sum_{k=1}^{n} a_k \leq C$. נביט ב: $\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$ וקיים N חיובי כך ש $N \geq \sigma(1), \sigma(2), \ldots$. מכאן נובע כי מתקיים $\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{N} a_k \leq C$ ולכן A' מתכנס.

משפט: נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ (A)$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}\ (A')$ תמורה על A. אם הטור A מתכנס בהחלט גם A' מתכנס בהחלט ומתקיים $A' = A$.

הוכחה: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתקיים $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ מתכנס.

גם מתקיים $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$ וידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, לכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנס.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} {a_{\sigma(n)}}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} {a_{\sigma(n)}}^-$ וע״פ מה שהוכחנו גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ מתכנס.

משפט של רימן: *(Riemann)*

יהי טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ (A)$. ונניח ש$A$ מתכנס על תנאי. אז לכל $s \in \bar{R}$ קיימת תמורה $\sigma\colon \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ כך ש$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \mathrm{S}$.

הוכחה: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנס, וגם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$.

בהכרח ש$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$. $\mathrm{S} \in \mathrm{R}$ וידוע $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$.

לכן $a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{n_1}^+ > S$ וגם $a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - a_1^- - a_2^- - \cdots - a_{m_1}^- < S$ כאשר m_1 זה הפעם הראשונה שהקטן מS מתקיים. ונבצע שוב: $a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - a_1^- - \cdots - a_{m_1}^- + a_{n_1+1}^+ + \cdots + a_{n_2}^+ > S$ ושוב n_2 מסמל את הפעם הראשונה שהגדול מS מתקיים. לאחר ביצוע אותו התהליך הלוך ושוב נקבל $\left|A'_{n_k} - \mathrm{S}\right| \leq \left|a_{n_k}^+\right|$ וידוע כי $a_n \to 0$ לכן $(A'_{n_k} - \mathrm{S}) \to 0$. ונגדיר $\sigma(\mathrm{k}) = n_k$.
מ.ש.ל.

מכפלה של טורים:

לפי קושי: שני הטורים הם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ (A)$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\ (B)$.

הגדרה: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\ (C)$, כאשר נגדיר $C_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$. ובאופן כללי יותר: $C_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$.

משפט: נניח שהטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ (A)$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\ (B)$ מתכנסים בהחלט.

אזי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\ (C)$ גם מתכנס כך ש$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

הוכחה: C מתכנס בהחלט?

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_m| = \sum_{m=1}^{\infty} \left|\sum_{i+j=n} a_i b_j\right| \leq \sum_{m=0}^{n} \sum_{i+j=n} |a_i| |b_j| \leq \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} |a_i| |b_j| = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \sum_{j=0}^{n} |b_j| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|$$

וקיבלנו אומדן מלעיל. כי כל אחד בנפרד מתכנס בהחלט ע״פ נתון.

כעת נגדיר: $A_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ וגם $B_n := \sum_{j=0}^{n} b_j$ ולכן $A_n \cdot B_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \sum_{j=0}^{n} b_j = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} b_j\, a_i = C_n + \sum_{(i,j) \in \Delta_n} a_i b_j$.

מכאן ש$0 \to s_{2n} - s_{n-1} = |a_i||b_i| \sum_{n \le i+j \le 2n} \le a_i b_j \sum_{(i,j)\in\Delta_n} \le |A_n \cdot B_n - C_n|$ ואז $\infty > |a_i||b_j| \sum_{i+j=n} \sum_{m=0}^{n}$ ולכן קיים גבול , ששווה לS.

דוגמא : $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sum_{n=1}^{\infty} (A)$ נגדיר $C_n \sum_{n=1}^{\infty} (A')$ כאשר $2 \to \frac{(n+1)2}{n} = \frac{2}{n} \sum_{i+j=n}^{\infty} \underbrace{\ge}_{\sqrt{ij} \le \frac{i+j}{2}} \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{1}{\sqrt{j}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}} \frac{(-1)^j}{\sqrt{j}} \sum_{n=1}^{\infty} = C_n$.

הוכחה לא ברורה כל כך.. אשאל את המרצה. אעלה עדכון של כל הקבצים לקראת סוף הסמסטר.