הרצאה 8

נכתב על ידי נועם יערי

20.03.2016

הגדרה

$X:\Omega \to \mathbb{R}$ משתנה מקרי.

תוחלת:

$$E(X)=\sum_{a\in\mathbb{R}} P(X=a)\cdot a=\sum_{a\in\mathbb{R}}\left(\sum_{w:X(\omega)=a} P(\omega)\cdot X(\omega)\right)=\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\cdot X(\omega)$$

בנוסף, לכל פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מתקיים:

$$E\big(f(x)\big)=\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\cdot f\big(X(\omega)\big)=\sum_{a\in\mathbb{R}} P(X=a)\cdot f(a)$$

עובדה

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\to E(X)$$

משפט

התוחלת אדיטיבית.

הוכחה

יהיו $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ שני משתנים מקריים.

$$E(X+Y)=\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\cdot(X+Y)(\omega)=\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\cdot\big(X(\omega)+Y(\omega)\big)=$$

$$=\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\cdot X(\omega)+\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\cdot Y(\omega)=E(X)+E(Y)$$

שאלה

הכינו n משלוחי מנות. הם נשלחים ל – n היעדים באקראי. חשבנו את הסיכוי שאף משלוח לא יגיע ליעד (בעיית המזכירה המבולבלת). מה התוחלת של מספר במשלוחים שיגיעו ליעד?

פתרון

נסמן ב – X את מספר המשלוחים שמגיעים ליעד. נגדיר משתנים מציינים:

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{משלוח } i \text{ מגיע ליעד}\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

ברור ש – $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$

$$\boldsymbol{E(X)} =_{\text{אדיטיביות}} \sum E(X_i)$$

$$E(X_i) =_{\text{משתנה עם הערכים } 0,1} P(X_i=1)=\frac{1}{n}$$

לכן:

$$\sum E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=\mathbf{1}$$

דוגמה

מסדרים n אנשים שוני גובה בטור. איש הוא "די גבוה" אם אין לפניו מישהו גבוה יותר.

שאלה: כמה אנשים די גבוהים יש בטור (בתוחלת), אם הוא מסודר באקראי?

פתרון: נסמן ב – X את מספר האנשים שהם די גבוהים (האנשים ממוספרים לפי גובה - $1 < 2 < \cdots n$)

נסמן ב – X_i את המשתנה המציין:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{האיש במקום } i \text{ הוא די גבוה} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

$$E(X) = \sum E(X_i)$$

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{1}{i}$$

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sim \log n + \gamma_{=0.577521}$$

נוסחת התוחלת השלמה

נניח $X: \Omega \to \mathbb{R}$ משתנה מקרי,

$\Omega = \biguplus B_n$ פירוק של המרחב.

טענה

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X|B_n) \cdot P(B_n)$$

הוכחה

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\omega \in B_n} P(\omega) \cdot X(\omega) \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\omega \in B_n} P(\omega|B_n) \cdot P(B_n) \cdot X(\omega) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(x|B_n) \cdot P(B_n)$$

■

חוק התוחלת החוזרת

X, Y משתנים מקריים.

$$E(X) = E(\overbrace{E(X|Y)}^{\text{פונקציה של } Y})$$

הוכחה

לפי נוסחת התוחלת השלמה:

$$\Omega = \dot{\bigcup}_y \{Y = y\}$$

$$E(X) = \sum_y E(X|Y = y) \cdot P(Y = y) = E\big(E(X|Y)\big)$$

דוגמה

מטילים קובייה (Y) ואחר כך מטילים Y קוביות שסכומן X.

$$E(X) = E\big(E(X|Y)\big)$$

$$X_{Y\ \text{בהנתן}} = X_1 + \cdots X_Y$$

לכן, $E\big(E(X|Y)\big) = E(3.5 \cdot Y) = 3.5E(Y) = 3.5^2$

מסקנה

נניח ש - X, Y בלתי תלויים.

$$E(XY) = E\big(E(XY|Y)\big) = E\big(Y \cdot E(X|Y)\big) =_{\text{כי בלתי תלויים}} E\big(Y \cdot E(X)\big) =_{\text{הוצאת סקלר}} E(X) \cdot E(Y)$$

הגדרה

משתנים מקריים X, Y הם בלתי מתואמים אם $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

מסקנה

משתנים מקריים בלתי תלויים הם בלתי מתואמים (ההפך אינו בהכרח נכון).

דוגמה

דוגמה למשתנים מקריים תלויים שהם בלתי מתואמים:

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=1$
$X=-1$	1	0	-1
$X=1$	-1	0	1

צריך לקבוע הסתברות עבור כל מקרה.

5 פרמטרים.

בלתי מתואמים: 4 פרמטרים, בלתי תלויים: 3 פרמטרים.