משוואות ליניאריות עם מקדמים קבועים

משוואה הומוגנית עם מקדמים קבועים

תזכורת

משוואה הומוגנית היא משוואה מהצורה:

$$L(y) = 0$$

כאשר:

$$L(y) = a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y \,; \quad a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$$

1. כל L הוא פולינום באופרטור $Dy = y'$, כלומר:

$$L = a_n \cdot D^n + a_{n-1} \cdot D^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot D + a_0$$

וניתן לפרקו, מעל $\mathbb{R}$, לרכיבים ליניאריים וריבועיים אי פריקים, כלומר:

$$\ker L = \bigoplus \ker \text{גורמים}$$

2. א. מתקיים:

$$(D - \alpha)y = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$y = C \cdot e^{\alpha \cdot x}$$

ב. מתקיים:

$$(D^2 + bD + c)y = 0$$

אם $b^2 < 4c$, אז השורשים הם $-b/2 \pm i\omega$ וכו:

$$y = e^{-\frac{b}{2}} \cdot (A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$$

ג. מתקיים:

$$L\,y = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$L^m\,(x^{m-1}y) = 0$$

■

משוואה אי הומוגנית עם מקדמים קבועים

ניתן לפתור בעזרת שיטת וריאציית מקדמים.

שיטת "המשמיד"

$$Ly = b(x)$$

כאשר $b(x)$ מורכב כמכפלה של פולינומים, פונקציות מעריכיות ופונקציות טריגונומטריות, "המושמדות" ע"י אופרטור עם מקדמים קבועים.

טבלת אופרטורים משמידים		
משפחה	**פונקציה**	**משמיד**
פולינום	$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$	D^{n+1}
פונקציה מעריכית	$e^{\alpha x}$	$D-\alpha$
פונקציה טריגונומטרית	$\sin(\omega x) \quad ; \quad \cos(\omega x)$	$D^2+\omega^2$

דוגמה

$$\boxed{(D^2+3)y = e^x}$$

פתרון המשוואה ההומוגנית הקשורה:

$$y_h = c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{3}x\right) + c_2 \cdot \sin\left(\sqrt{3}x\right)$$

האופרטור "המשמיד":

$$M = D-1$$

נפעיל את המשמיד:

$$(D-1)(D^2+3)y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = \overbrace{c_1 \cdot \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{3}x)}^{y_h} + c_3 \cdot e^x$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה מהצורה:

$$y_p = c_3 \cdot e^x$$

נגזור:

$$y_p' = c_3 \cdot e^x$$

$$y_p'' = c_3 \cdot e^x$$

נציב במשוואה:

$$(y_p'' + 3)y_p = e^x$$

$$\Downarrow$$

$$c_3 \cdot e^x + 3c_3 \cdot e^x = e^x$$

$$\Downarrow$$

$$c_3 = \frac{1}{4}$$

לכן, הפתרון הכללי למשוואה:

$$y = c_1 \cdot \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{3}x) + \frac{1}{4} \cdot e^x$$

■

דוגמה

$$\boxed{(D^2 + 1)y = x^2 + 4}$$

פתרון המשוואה ההומוגנית הקשורה:

$$y_h = A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x)$$

האופרטור המשמיד:

$$M = D^3$$

נפעיל את המשמיד:

$$D^3 \cdot (D^2 + 1)y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x) + c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$y_p = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3$$

נגזור:

$$y_p' = 2c_1 \cdot x + c_2$$

$$y_p'' = 2c_1$$

נציב במשוואה:

$$\left(y_p'' + 1\right)y_p = x^2 + 4$$

$$\Downarrow$$

$$2c_1 + c_1x^2 + c_2x + c_3 = x^2 + 4$$

$$\Downarrow$$

$$c_1x^2 + c_2x + 2c_1 + c_3 = x^2 + 4$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & : & c_1 = 1 \\ x & : & c_2 = 0 \\ 1 & : & 2c_1 + c_3 = 4 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = 2$$

לכן, הפתרון הכללי למשוואה:

$$y = A \cdot sin(x) + B \cdot \cos(x) + x^2 + 2$$

■

דוגמה

$$\boxed{(D^2 - 4D + 4)y = 2 \cdot e^{2x} + \cos(x)}$$

פתרון המשוואה ההומוגנית הקשורה:

$$y_h = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e_{2x}$$

האופרטור "המשמיד":

$$M = (D-2) \cdot (D^2+1)$$

נפעיל את "המשמיד":

$$(D-2) \cdot (D^2+1) \cdot (D-2)^3 y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(D^2+1) \cdot (D-2)^3 y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = B_1 \cdot \sin(x) + B_2 \cdot \cos(x) + \overbrace{B_3 \cdot e^{2x} + B_4 \cdot x \cdot e^{2x}}^{y_h} + B_5 \cdot x^2 \cdot e^{2x}$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$y_p = B_1 \cdot \sin(x) + B_2 \cdot \cos(x) + B_5 \cdot x^2 \cdot e^{2x}$$

נגזור:

$$y_p' = B_1 \cdot \cos(x) - B_2 \cdot \sin(x) + (2B_5 \cdot x + 2B_5 \cdot x^2) \cdot e^{2x}$$

$$y_p'' = -B_1 \cdot \sin(x) - B_2 \cdot \cos(x) + (4B_5 \cdot x + 4B_5 \cdot x^2 + 2B_5 + 4B_5 \cdot x) \cdot e^{2x}$$

נציב במשוואה, ונקבל:

$$2\mathrm{B}_5 \cdot e^{2x} = 2 \cdot e^{2x}$$

$$\Downarrow$$

$$B_5 = 1$$

באופן דומה נקבל את B_1, B_2.

■

דוגמה

$$\boxed{y'' + b \cdot y' + y = \sin(\omega \cdot x)\ , \quad 0 < b \ll 1\,, \omega \in \mathbb{R}}$$

פתרון המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$y_h = e^{-\frac{b}{2} \cdot x} \cdot \left(A \cdot \sin\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} \cdot x\right) + B \cdot \cos\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} \cdot x\right)\right)$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$y_p = c_1 \cdot \sin(\omega \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\omega \cdot x)$$

נגזור:

$$y_p' = c_1 \omega \cdot \cos(\omega \cdot x) - c_2 \omega \cdot \sin(\omega \cdot x)$$

$$y_p'' = -c_1 \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot x) - c_2 \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot x)$$

נציב במשוואה, ונקבל:

$$\begin{aligned} \sin(\omega x):& \qquad -c_1 \omega^2 - b c_2 \omega + c_1 = 1 \\ \cos(\omega x):& \qquad -c_2 \omega^2 + b c_1 \omega + c_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$c_2 = \frac{b c_1 \omega}{\omega^2 - 1}$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 (1 - \omega^2) - \frac{b^2 \omega^2 c_1}{\omega^2 - 1} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 \left(\frac{(1 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2}{1 - \omega^2}\right) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 = \frac{1-\omega^2}{(1-\omega^2)^2 + b^2\omega^2}$$

$$\Downarrow$$

$$c_2 = -\frac{b\omega}{(1-\omega^2)^2 + b^2\omega^2}$$

לכן:

$$y_p = \frac{1-\omega^2}{(1-\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \cdot \sin(\omega x) - \frac{b\omega}{(1-\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \cdot \cos(\omega x)$$

כאשר $\omega \longrightarrow 1$:

$$y_p = -\frac{1}{b} \cdot \cos(x)$$

הערה

תופעה זו נקראת **תהודה**, כאשר מניעים מערכת מחזורית בתדר הנכון, מקבלים תנודות גדולות מאוד.

■