

שאלה 1

פתרון את השויונים ואת האי שויונים הבאים:

$$\text{א) } 2| - 2x - 2| - 3 = 13$$

$$\text{פתרון: } x = 3, -5 \leftarrow x + 1 = \pm 4 \leftarrow 4|x + 1| = 16$$

$$\text{ב) } |x - 1| = 2x + 1$$

$$\text{פתרון: } x = 0, -2 \leftarrow x - 1 = \pm(2x + 1)$$

$$\text{ג) } |2x - 1| = x^2$$

פתרון: $x^2 = \pm(2x - 1)$, לאחר פתרון של משוואה ריבועית מקבלים את הפתרונות

$$\text{הבאים: } x = 1, -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{ד) } |x - 1| = |x^2 - 2x + 1|$$

נשים לב ש- $(x - 1)^2 \geq 0$ ולכן אפשר להוריד ערך מוחלט ולקבל

$$|x - 1| = x^2 - 2x + 1 \text{ ולכן } x - 1 = \pm(x^2 - 2x + 1) \text{ . לאחר פתרון של משווא ריבועית}$$

נקבל את פתרונות באים: 0, 1, 2

$$\text{ה) } -3| - 2x + 4| \leq 4$$

פתרון: נכון לכל x ממשי משום שמצד שמאל יש מספר אי חיובי תמיד ומצד ימין מספר

חיובי ולכן אי שוויון זה תמיד מתקיים.

$$\text{ו) } |x^2 + x - 2| < x + 3$$

נקודות אשר מאפסות את ביטוי בערך מוחלט הן: $x = -1, 2$.

בתחום $x > 2$ ביטוי בתוך ערך המוחלט חיובי ולכן אפשר להוריד ערך מוחלט, אי שוויון

שמתקבל: $x^2 + x - 2 < x + 3$. פתרון שלו הוא $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ חיתוך ילד עם התחום

$$2 < x < \sqrt{5}$$

בתחום $1 < x < 2$ הביטוי בערך מוחלט שלילי ולכן אחרי הורדת של ערך מוחלט נשים לפניו "–" ונקבל $-(x^2 + x - 2) < x + 3$. כל $x \neq 1$ מקיים את אי שוויון ולכן חותוך עם התחום $1 < x < 2$ נותן $1 < x < 2$ וגם $x \neq 1$.

בתחום $x < -1$ הביטוי שבסוגרים הוא שוב חיובי ולכן אותם x -ים אשר מקיימים את אי השוויון הם $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ ולכן חיתוך עם $x < -1$ נותן $-\sqrt{5} < x < -1$.

נקודה $x = 2$ מקיימת את אי השוויון ולכן הפתרון הוא $2 \leq x < 5$ או $1 < x < 2$ או $-\sqrt{5} < x < -1$

$$||x - 1| - 5| < 4 \quad (ז)$$

פתרון: $||x - 1| - 5| < 4 \iff |x - 1| - 5 < 4$ וגם $|x - 1| - 5 > -4$ ולכן $|x - 1| < 9$ וגם $|x - 1| > 1$. פתרון לאי שוויון ראשון הוא $-8 < x < 10$, ולאי שוויון שני הוא $x > 2$ או $x < 0$. חיתוך בין שני התחומים הוא $2 < x < 10$ או $-8 < x < 0$.

$$|2x^2 - x - 1| + 1 < x^2 \quad (ח)$$

פתרון: אף x אינו מקיים את אי שוויון.

$$9^x + 9^{x+1} = 30 \quad (ט)$$

פתרון: $3^{2x} + 3^{2x} \cdot 9 = 10 \cdot 3^{2x} = 30$. נחלק את שני האגפים ב- 10 ונקבל $3^{2x} = 3$ ולכן פתרון לאי שוויון הוא $x = \frac{1}{2}$.

$$16^x + 4 = 65 \cdot 4^{x-1} \quad (י)$$

פתרון: נכפיל את שני אגפים ב- 4 ונקבל $4 \cdot 16^x + 16 = 65 \cdot 4^x$. לאחר העברת אגפים נקבל את המשוואה הבאה: $4 \cdot 4^{2x} - 65 \cdot 4^x + 16 = 0$. נסמן $t = 4^x$, לאחר הצבה במשוואה מקבלים $4t^2 - 65t + 16 = 0$. לאחר פתרון של משוואה ריבועית מקבלים $t_1 = 16$ ו- $t_2 = \frac{1}{4}$.

סה"כ פתרון למשוואה הוא $x = 1, \frac{-1}{2}$.

$$\begin{cases} 9^x - 2y = 3 \\ 3^x + y = 6 \end{cases} \quad (ה)$$

פתרון: נכפיל את שתי משוואות ב- 2 ונחבר ביניהן על מנת לבטל את y , אחרי פעולה זו מקבלים את משוואה $3^{2x} + 2 \cdot 3^x = 15$, נציב $t = 3^x$ ואחרי פתרון של משוואה ריבועית נקבל $x = 1$. נחלץ את y ממאחת המשוואות ונקבל $y = 3$.

שאלה 2

א) מצא את x מהמשוואה: $\log_2(\log_x(2x+3)) = 1$

פתרון: נמצא קודם תחום הגדרה: צריך להתקיים $\log_x(2x+3) > 0$ וגם $x > 0, x \neq 1$

$$\text{וגם } x > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x+3 > 0$$

עכשיו נבדוק מתי $\log_x(2x+3) > 0$: אם $x > 1$ אז $2x+3 > 1$ ולכן $x > -1$ אם

$$x < 1 \text{ אז } 2x+3 < 1 \text{ ולכן } x < -1$$

ס"כ חיתוך בין כל התחומים נותן $x > 0, x \neq 1$

עכשיו נמצא פתרון לאי שוויון: $\log_2(\log_x(2x+3)) = 2 \Leftrightarrow \log_x(2x+3) = 2 \Leftrightarrow 2x+3 = x^2$

1. פתרון של משוואה ריבועית נותן $x_1 = 3, x_2 = -1$ אבל -1 לא בתחום ההגדרה ולכן הפתרון

$$\text{הוא } x = 3$$

ב) מצא לאילו ערכי x , גרף של פונקציה $y = \log_2(x^2 - 6x) - 4$ נמצא מתחת לציר

x -ה

פתרון: רוצים למצוא באיזה תחום $\log_2(x^2 - 6x) - 4 > 0$. תחום ההגדרה הוא $x > 6$

או $x < 0$ ולכן נשאר לנו לפתור את אי שוויון $x^2 - 6x > 16$ ולעשות חיתוך עם תחום

ההגדרה. סה"כ מקבלים $x > 8$ או $x < -2$.

ג) פתור את אי השוויון $\log_{\frac{1}{2}}(\log_4 x) \geq 0$

פתרון: תחום ההגדרה הוא $\log_4 x > 0$ משום ש- $4 > 1$ אז $x > 1$.

$$\frac{1}{2} < 1 \text{ אז } \log_4 x \leq 1 \text{ ולכן } x \leq 4$$

חיתוך עם תחום ההגדרה נותן $1 < x \leq 4$.

שאלה 3

מצא עבור אילו ערכי x , גדולים ערכי הפונקציה $y = |x^2 - 4x|$ מערכי הישר $y =$

$$-3x + 12$$

פתרון: רוצים לבדוק מתי $|x^2 - 4x| > -3x + 12$. נקודות אשר מאפסות את ביטוי בתוך

ערך מוחלט הן $x = 0, 4$. כמו תמיד, נחתק את תחום ל 3 תחומים ונבדוק את התנהגות אל

אי השוויון בכל אחד מהתחומים. ס"כ פתרון וא $x > 4$ או $3 < x < 4$ או $x < -3$.