תרגיל 6

26 באפריל 2018

פתור את המד"רים הבאים בעזרת גורם אינטגרציה, במידה ואפשר.

1. $(1 - e^{2x} - y^2)dx + ydy = 0$
פתרון:

הבדיקה הראשונה עובדת: $2 = \frac{2y}{y} = \frac{Y_x - X_y}{Y}$. נסמן: $a(x) = 2$. צריך לפתור את המד"ר ההומוגנית: $\mu' + 2\mu = 0$. $A(x) = 2x$. $\mu = e^{-2x}$.

עכשיו צריך לפתור את המד"ר המדויקת: $e^{-2x}(1 - e^{2x} - y^2)dx + e^{-2x}ydy = 0$.

נעשה אינטגרל $\int Ydy$. נקבל ש $Q(x,y) = \frac{e^{-2x}y^2}{2}$. כזכור, $F = Q + c(x)$. נגזור לפי x.

$$F_x = Q_x + c' = X$$

כלומר:

$$-e^{-2x}y^2 + c' = e^{-2x} - 1 - y^2e^{-2x}$$

$$c' = e^{-2x} - 1$$

$$c = \frac{-e^{2x}}{2} - x$$

תשובה סופית: $Q + c(x) = Constant$

כלומר, $\frac{e^{-2x}(y^2+1)}{2} - x = Constant$

2. $(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0$
פתרון:

במקרה זה הבדיקה הראשונה לא עובדת, אבל השניה תעבוד: $\frac{X_y - Y_x}{X} = \frac{6xy^2 + 4y^3 - y^3}{2xy^3 + y^4} =$

$$\frac{3y^2(2x+y)}{y^3(2x+y)} = \frac{3}{y}$$

צריך לפתור את המד"ר: $\mu' + \frac{3}{y}\mu = 0$. $A(y) = 3\ln y$. ולכן: $\mu = e^{-3\ln y} = \frac{1}{y^3}$.

עכשיו נותר לפתור את המד"ר המדוייקת:

$(2x + y)dx + (x - \frac{2}{y^3})dy = 0$.

נעשה קודם אינטגרל לפי x: $\int Xdx = x^2 + yx$

כלומר, $Q(x,y) = x^2 + yx$

$$F = Q + c(y)$$

$$F_y = Q_y + c' = Y$$

$$x + c' = x - \frac{2}{y^3}$$

$$c' = -\frac{2}{y^3}$$

$$c = \frac{1}{y^2}$$

ולבסוף, הפתרון הוא:

$$x^2 + yx + \frac{1}{y^2} = Constant$$

3. $(xe^y)dx + (\cos x - y)dy = 0$

פתרון:

במקרה זה ניתן לראות שאף אחת מהבדיקות לא עובדת. לא ניתן לפתור את המשוואה באמצעות גורם אינטגרציה.

4. $(y^2 - y)dx - xdy = 0$

פתרון:

הבדיקה השניה תעבוד: $\dfrac{X_y - Y_x}{X} = \dfrac{2y}{y^2 - y} = \dfrac{2}{y-1}$

צריך לפתור את המשוואה: $\mu' + \dfrac{2}{y-1}\mu = 0$.

$$A(y) = 2\ln(y-1)$$

$$\mu = e^{-2\ln(y-1)} = \frac{1}{(y-1)^2}$$

צריך לפתור את המשוואה המדויקת:

$$\frac{y}{y-1}dx - \frac{x}{(y-1)^2}dy = 0$$

נחשב אינטגרל לפי x.

$$\int Xdx = \frac{y}{y-1}x$$

$$F = Q + c(y)$$

$$F_y = Q_y + c' = Y$$

$$\frac{-x}{(y-1)^2} + c' = \frac{-x}{(y-1)^2}$$

כלומר, $c' = 0$

$$c = 0$$

והתשובה הסופית היא: $Constant = \dfrac{-x}{(y-1)^2}$

הערה: שימו לב שמשוואה זו הייתה משוואה פרידה, ולכן יכולנו לפתור אותה בדרך נוספת.