תרגיל 9 אינפי 1 תיכוניסטים תשפ"א.

תרגיל 1. נגדיר את תנודה של הפונקציה f בקטע I על ידי $\omega_f\left(I\right) = \sup_{x,y\in I}\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|$.

1. הוכיחו, ש $\omega_f\left(I\right)=\sup_{x\in I}f\left(x\right)-\inf_{x\in I}f\left(x\right)$
2. הוכיחו/הפריכו: ל f קיים גבול ימני ב x_0 אם ורק אם

$$\lim_{\epsilon\to 0}\omega_f\left(\left(x_0,x_0+\epsilon\right)\right)=0.$$

3. נגדיר את תנודה של הפונקציה f ב x_0 על ידי

$$\omega_f\left(x_0\right)=\lim_{\epsilon\to 0}\omega_f\left(\left(x_0-\epsilon,x_0+\epsilon\right)\right).$$

הוכיחו/הפריכו: f רציפה ב x_0 אם ורק אם $\omega_f\left(x_0\right)=0$.

4. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) אם ל f קיימת נקודת אי רציפות סליקה ב x_0, אזי $\omega_f\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)-f\left(x_0\right)$.

(ב) אם ל f קיימת נקודת אי רציפות מסוג ראשון ב x_0, אזי

$$\omega_f\left(x_0\right)=\left|\lim_{x\to x_0^+}f\left(x\right)-\lim_{x\to x_0^-}f\left(x\right)\right|.$$

תרגיל 2. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת באופן הבא: לכל מספר רציונלי q הנתון בצורה המצומצמת $q=\frac{a}{b}$, נגדיר $f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{b}$) ולכל מספר אי-רציונלי x נגדיר $f\left(x\right)=0$.

1. מצאו את נקודות האי-רציפות של f וסווגו אותן.
2. הוכיחו/הפריכו: קיימת פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שרציפה בדיוק בנקודה אחת. (אין קשר לסעיף הקודם הקודמים: רמז שמן: פונקציית דיריכלה).

תרגיל 3. הוכיחו שקיימים אינסוף מספרים המקיימים $x=\tan x$.

תרגיל 4. יהיו $a<b<c$. עבור פונקציה f נאמר ש x היא נקודת שבת של f אם מתקיים

$$f\left(x\right)=x.$$

הוכיחו או הפריכו:

1. לכל פונקציה רציפה $f:\left[a,b\right]\to\left[a,c\right]$ קיימת נקודת שבת.
2. לכל פונקציה רציפה $f:\left[a,c\right]\to\left[a,b\right]$ קיימת נקודת שבת.