פתרון מערכת משוואות לינאריות

$$Ax = b$$

עבור מטריצה A, רוצים למצוא בקלות את הפתרונות לכל b שיתנו לנו. בשביל זה רוצים "לזכור" את התהליך של דירוג המטריצה, שכן הוא תלוי רק בA ולא בB.

בשלב הi מאפסים את העמודה הi. לכן, למשל לפני השלב 2 המערכת $A^{(2)}x = b^{(2)}$ תראה כך:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{22}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

בשלב הk:

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{22}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

בכל איטרציה מקבלים סט חדש של משוואות, אבל למעשה הוא שקול לפי סט הפתרונות שאמור להתקבל.

ניתן לחשב מטריצת כופלים:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

בכל שלב, כדי לעבור לסט המשוואות החדש, צריך לעדכן לכל $i, j = k+1, \dots n$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} \cdot b_k^{(k)}$$

- השורות $i = 1, \dots k$ נותרות ללא שינוי - שכן לא נוגעים בהן בשלב הזה של דירוג(הן כבר מדורגות)
- העמודות $j = 1, \dots k$ נותרות ללא שינוי - בעמודות האלה, בשורות שבהן כן נוגעים, יש רק אפסים, ולכן מקבלים חיבור של אפסים והתוצאה נשארת אפס.

- יוצא הדופן הוא $a_{kk}^{(k)}$ ־ שתמיד יקבל אפס.

בסוף כל התהליך מקבלים מטריצה משולשית עליונה $A^{(n)}$ ־ כל מה שמתחת לאלכסון זה אפסים. נסמן:

$$U = A^{(n)} \qquad g = b^{(n)}$$

מהשלב הזה הפתרון מחושב בצורה קלה ע"י הצבה לאחור: אם יש לנו

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

מתחילים לחשב מx_n:

$$u_{nn}x_n = g_n \Rightarrow \boxed{x_n = \frac{g_n}{u_{nn}}}$$

וממשיכים אחורה:

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = g_{n-1} \Rightarrow \boxed{x_{n-1} = \frac{g_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}}$$

וכן הלאה, כל פעם מחשבים את $\boxed{x_k = \frac{g_k - \sum_{i=k+1}^{n} u_{ki}x_i}{u_{kk}}}$, עד שמגיעים ל$x_1$.

פירוק מטריצות למטריצות משולשיות(L U decomposition)

בתהליך הזה קיבלנו מטריצה U, שהיא המשולשית העליונה שנוצרה אחרי תהליך הדירוג. בשביל לשמור אותה בזיכרון, מספיק לנו החצי הימני עליון של המטריצה ־ מה נעשה עם החצי השמאלי תחתון?

ניתן לאכסן שם את הכופלים m_{ij}, ולקבל מטריצה

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

מסתבר שהמטריצה המקורית שווה למכפלה של שני תוצרי הלואי:

$$\boxed{A = L \cdot U}$$

הוכחה

$$(LU)_{ij} = \begin{pmatrix} m_{i1} & \cdots & m_{i,i-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1j} \\ \vdots \\ u_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

מבדילים בין שני מקרים: $i \leq j$ ו־$j > i$, ורואים כי בשני המקרים $(LU)_{ij} = a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$, ולכן $LU = A$

מסקנה

$$\det(A) = \det(LU) = \det(U) \cdot \det(L)$$

אבל הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא איברי האלכסון, ולכן

$$\det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii} \qquad \det(L) = 1$$

ולכן

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

משמעות מעשית

נניח שפתרנו $A \cdot x = b$ עבור A, b מסויימים. זה אומר שכבר ידוע לנו הפירוק $A = L \cdot U$.

במידה ואנו נדרשים לפתור שוב את המערכת, עבור אותו A אבל b חדש, ניתן להשתמש ב־L ו־U כדי לקצר את התהליך:

$$(L \cdot U)\, x = b$$

$$L\,(Ux) = b$$

$$Ux = b'$$

$$L \cdot b' = b$$

b ידוע, ו־L משולשית תחתונה וגם ידועה, ולכן ניתן לבצע הצבה לפנים כדי למצוא את b'.
כעת חוזרים ל־$Ux = b'$, ומכיוון שגם U כבר ידועה והיא משולשית עליונה, ניתן לבצע הצבה לאחור ולמצוא את x.

סיבוכיות

- באיטרציה הראשונה, דבר ראשון צריך למצוא $n-1$ כופלים - אלו $n-1$ פעולות חילוק. לאחר מכן צריך לבצע $n\left(n-1\right)$ פעולות כפל וחיסור(על כל שורה צריך לעשות n מכפלות וn חיסורים(העמודה הראשונה רק אפסים, אבל מחשבים גם על b).
- באיטרציה הk צריך לבצע $n-k$ פעולות חילוק כדי למצוא $n-k$ כופלים. עם כל כופל(כלומר לכל שורה) מבצעים $n-k+1$ פעולות כפל וחיסור, ויש $n-k$ שורות, וסה"כ $\left(n-k+1\right)\left(n-k\right)$ פעולות.

מספר הפעולות הכולל:

- מספר פעולות חילוק:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(n-k\right)=\sum_{i=1}^{n-1}i=\frac{1}{2}n\left(n-1\right)$$

- מספר פעולות הכפל/חיסור:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(n-k\right)\left(n-k+1\right)=\sum_{i=1}^{n-1}i\left(i+1\right)=\frac{1}{3}n\left(n^{2}-1\right)$$

סה"כ, לפתרון המערכת דרושות $\frac{2n^{3}}{3}+\frac{n^{2}}{2}-\frac{7n}{6}$ פעולות - כלומר סדר הגודל של הסיבוכיות הוא $\theta\left(n^{3}\right)$.
לאחר מכן יש לבצע הצבה לאחור - אבל סדר הגודל של זה הוא $\theta\left(n^{2}\right)$, אז זה לא משפיע על סדר הגודל של הסיבוכיות.

מסקנה

אם יש לנו n ווקטורי b שונים, ונרצה לחשב את הפתרונות לכולם מההתחלה - זה סדר גודל של $\theta\left(n^{4}\right)$. לעומת זאת, אם מבצעים פירוק LU אז מבצעים פעם אחת את הפירוק ב$\theta\left(n^{3}\right)$, ואז מוצאים את כל הפתרונות לכל ווקטורי הb ב$\theta\left(n^{3}\right)$.

שימוש - מציאת מטריצה הופכית

$$A\cdot X=I$$

$$Ax^{1}=e_{1},Ax^{2}=e_{2},\ldots Ax^{n}=e_{n}$$

כלומר היפוך מטריצה הוא פתרון של n מערכות עם אותו A וbים שונים.