אלגברה מופשטת 1, תרגיל בית 9

מתרגלים: סולי וישקאוצן ואדם צ'פמן. להגשה ב8.1 או ב11.1 בהתאם לשיעור התרגיל.

1) נתונות התמורות $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\3&7&5&4&1&10&9&2&8&6\end{pmatrix}$

ו

$b=\begin{pmatrix}4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4&5\end{pmatrix}$

a. רשמו אותן פעם כמכפלות של מחזורים זרים ופעם כמכפלות של חילופים (מחזורים מאורך 2, לאו דוקא זרים).

b. חשבו את התמורות הבאות וקבעו את הסדר והזוגיות שלהן: aba^{-1} ו$ba^{12}b^{-1}$.

פיתרון: $a=\begin{pmatrix}1&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&7&9&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&10\end{pmatrix}$. $b=\begin{pmatrix}1&2&7\end{pmatrix}$.

$aba^{-1}=\begin{pmatrix}3&7&9\end{pmatrix}$. $ba^{12}b^{-1}=id$.

2) יהיו n ו r טבעיים כך ש $n\ge r$. $H=\{\sigma\in S_n:\sigma(i)\le r\forall i\le r\}$.

a. הוכיחו כי $H\le S_n$.

b. מצאו את $|H|$.

פיתרון: העתקת הזהות מקיימת $id(i)=i\le r$ לכל $i\le r$ ולכן $id\in H$. אם $\sigma,\tau\in H$ ו $i\le r$ אזי $\tau(i)\le r$ ולכן $\sigma(\tau(i))\le r$, משמע $\sigma\circ\tau(i)\le r$, ולכן $\sigma\circ\tau\in H$. מכיוון שכל תמורה היא מסדר סופי אין צורך להראות כי H סגורה להפכי, ולכן $H\le S_n$.

תמורה ב H היא תמורה המעתיקה את המספרים $\{1,\dots,r\}$ למספרים $\{1,\dots,r\}$ ובגלל שהיא חח"ע אז כל המקורות של המספרים $\{1,\dots,r\}$ מגיעים מהמספרים $\{1,\dots,r\}$. לכן היא גם מעתיקה את המספרים $\{r+1,\dots,n\}$ למספרים

$\{r+1,\ldots,n\}$ (באופן חח"ע ועל). מספר התמורות המקיימות זאת הוא $r!(n-r)!$, וזה הגודל של H.

3) קבעו מהו סימן התמורה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

פיתרון: אם מביטים בשורה השנייה, אז מספר המספרים הקטנים מn היושבים מימינו הוא $n-1$; מספר המספרים הקטנים מ$n-1$ היושבים מימינו הוא $n-2$ וכדומה. אי-לכך, מספר היפוכים הוא $(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\frac{n(n-1)}{2}$, והסימן של התמורה הוא $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

4) מה מספר האיברים מסדר 2 בחבורה S_8?

פיתרון: כל איבר מסדר 2 שייך לאחת הקבוצות A_1, A_2, A_3, A_4 כאשר A_i זו קבוצת התמורות המורכות ממכפלת i מחזורים זרים מאורך 2 ("חילופים זרים"). כמובן, לכל תמורה יש הצגה יחידה כמכפלת מחזורים זרים, ולכן הקבוצות הנ"ל זרות בזוגות. כעת את הגודל של A_i מחשבים באופן הבא: מחשבים את מספר האפשרויות לבחור i זוגות (לא סדורים) זרים מתוך 8 איברים באופן סדור, אז צריך לחלק ב$i!$ בגלל שסדר הכפל בין החילופים הזרים לא משנה. לכן

$$A_1=\binom{8}{2}=28\ ,\ A_2=\frac{\binom{8}{2}\binom{6}{2}}{2}=210\ ,\ A_3=\frac{\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{3!}=420$$

ו$A_4=\frac{\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{4!}=105$. סה"כ ישנן $28+210+420+105=763$.

5) יהי $n \ge 4$. מהן התמורות המתחלפות עם $\sigma = (1\ \ 2)(3\ \ 4)$? מה מספרן? מה מספר הצמודים של σ?

פיתרון: כל תמורה צמודה היא מכפלה של שני מחזורים זרים, ולכן (כמו בשאלה הקודמת) מספר הצמודים הוא $\dfrac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}}{2} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

מספר התמורות המתחלפות עמה הוא גודל המרכז שלה, והוא שווה ל$\dfrac{|S_n|}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}} = 8(n-4)!$.

התמורות המתחלפות עם $\sigma = (1\ \ 2)(3\ \ 4)$ הן כל התמורות שמשאירות את המכפלת שני המחזורים האלו כמות שהיא, דהיינו תמורות שהצמצום שלהן למספרים 1 עד 4 שווה לאחת מ8 התמורות הבאות: id, $(1\ \ 2)$, $(3\ \ 4)$, $(1\ \ 2)(3\ \ 4)$, $(1\ \ 3)(2\ \ 4)$, $(1\ \ 4)(2\ \ 3)$, $(1\ \ 3\ \ 2\ \ 4)$ ו$(1\ \ 4\ \ 2\ \ 3)$. על המספרים הגדולים מ4 הן יכולות לפעול בכל אופן אפשרי, וכך מתקבלות בדיוק $8(n-4)!$ תמורות שמתחלפות עם σ, וכפי שכבר ציינו, אין עוד מלבדן.