תרגיל 10

שאלה 1

נניח כי μ ו ν הינן מידות חיוביות σסופיות, כך ש ν הינה רציפה בהחלט ביחס ל μ. תהי $\rho = \mu + \nu$. שימו לב כי $\rho \gg \mu$ וגם $\rho \gg \nu$. הוכיחו כי אם $f = \frac{d\mu}{d\rho}$ ו $g = \frac{d\nu}{d\rho}$ אזי:

1. $f > 0$ כב"מ μ.
2. $f + g = 1$ כב"מ ρ.
3. $d\nu = \frac{g}{f} d\mu$.

שאלה 2

יהיו μ ו ν שתי מידות חיוביות כך ש $\nu \ll \mu$ ו $\mu = gd\nu$ באשר $0 < \delta < |g|$. הראו כי אם f פונקציה אינטגרבילית ביחס ל μ אזי היא אינטגרבילית ביחס ל ν, ומתקיים:

$$\int fgd\nu = \int fd\mu .$$

שאלה 3

חשבו את האינטגרלים הבאים, כאשר μ_F הינה מידת סטילטיס המתאימה לפונקציה F.

1. $\int_{(-\infty,0]} f \; d\mu_F$, כאשר f הינה פונקציה רציפה ו: $F(x) := \begin{cases} 2 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$.
2. $\int_{[0,1]} x \; d\mu_F(x)$, עבור: $F(x) := \begin{cases} 4 & x \geq 1 \\ x+1 & 0 \leq x < 1 \\ e^x & x < 0 \end{cases}$.

שאלה 4

נגדיר $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$F(y) := \int_0^\infty \frac{e^{-xy} - e^{-x}}{x} dx .$$

הוכיחו ש F גזירה, וחשבו את הנגזרת F'.

בהנאה :)