# אלגברה לינארית 2

## <u>תרגיל 3 - פתרון</u>

**1.6 תרגיל**. תהא $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

א. מצא את הערכים העצמיים של $A$. [רמז: בעזרת דטרמיננטה]

ב. מצא את המרחבים העצמיים של $A$.

פתרון:

$$|\lambda I - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -2 & 5 & \lambda-4 \end{pmatrix}\right| = \lambda(\lambda(\lambda-4)+5)+(-2)+0 = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = \lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda^2 + 3\lambda + 2\lambda - 2 =$$

$$\lambda^2(\lambda-1) - 3\lambda(\lambda-1) + 2(\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2) \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 1,2$$

$$(A-\lambda I)v_{1,2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = t \\ x_2 = t \\ x_1 = t \end{matrix} \Rightarrow v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{\lambda_{1,2}} = \left\{\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}\right\}$$

$$(A-\lambda I)v_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = t \\ x_2 = 0.5t \\ x_1 = 0.25t \end{matrix} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{\lambda_3} = \left\{\begin{pmatrix} 0.25t \\ 0.5t \\ t \end{pmatrix}\right\}$$

**1.7 תרגיל**. הוכח שלמטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ אין ערכים עצמיים.

פתרון:

$$|\lambda I - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right| = (\lambda-1)^2 + 1 = 0$$

אבל זה ביטוי שתמיד גדול מאפס ולכן לא קיים $\lambda$ שמאפס את הפולינום האופייני. כלומר לא קיימים ערכים עצמיים.

**1.9 תרגיל**!. [מקור: תהליכים מקריים] **מטריצת מרקוב** היא מטריצה ריבועית, שסכום אברי כל עמודה שלה הוא $1$. תהא $A$ מטריצת מרקוב. הוכח שלמטריצה $A^t$ יש ערך עצמי $\lambda=1$. מהו הוקטור העצמי המתאים?

תוצאת המכפלה $B\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ היא וקטור שהעמודה הi שלו היא סכום השורה הi של B. השורות של $A^t$ הינן העמודות של $A$ ולכן $A\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ כי הרי סכום כל עמודה של $A$ הוא אחד. לכן הוקטור העצמי הוא $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ והערך העצמי הוא $1$

**1.12 תרגיל**. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ותהא $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ ההעתקה של כפל במטריצה $A$ משמאל. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

**א**. $v$ וקטור עצמי של $A$ (המתאים לערך עצמי $\lambda$).

**ב**. $v$ וקטור עצמי של $T_A$ (המתאים לערך עצמי $\lambda$).

פתרון:

$$\forall (x_1 \quad \dots \quad x_n) \qquad T_A(x_1 \quad \dots \quad x_n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$v$ ו"ע של $T_A$ עם ע"ע $\lambda$ $\Leftrightarrow \exists v \neq 0, \lambda \in F : \lambda v = Av = T_A v \Leftrightarrow$ $v$ ו"ע של $A$ עם ע"ע $\lambda$

<u>תזכורת- מטריצה נילפוטנטית:</u>

מטריצה נילפוטנטית מסדר i היא מטריצה ריבועית, A , כך ש: $A^i = 0 \wedge A^{i-1} \neq 0$ .

**1.15 תרגיל***. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה נילפוטנטית מסדר $k$.

א. מהם הערכים העצמיים של $A$ ?

ב. הוכח (לכן (בעזרת (ז)): $\alpha I - A$ הפיכה $\Leftrightarrow$ $\alpha \neq 0$.

פתרון:

- א. $A$ ניליפוטנטית מסדר $k$ לכן $A^{k-1} \neq 0$ וגם $A^k = 0$. נניח $\lambda$ ע"ע של $A$. לכן $Av = \lambda v$ עבור איזה $v \neq 0$. נכפול ב $A^{k-1}$ לקבל $0 = A^k v = \lambda^k v$ אבל $v \neq 0$ לכן $\lambda = 0$. אפס חייב להיות ערך עצמי של $A$ מכיוון שאפס הוא ע"ע של כל מטריצה לא הפיכה (ובוודאי ניליפוטנטית לא הפיכה). בסיכום, 0 ע"ע של $A$ והוא יחיד, מכיוון שאם קיים ע"ע שונה מאפס ל-A אז החזקה ה-k שלו תהיה ע"ע שונה מאפס ל $A^k = 0$. סתירה
- ב. $\alpha I - A$ הפיכה אם"ם $|\alpha I - A| \neq 0$ אם"ם $\alpha$ לא ע"ע של $A$ אם"ם (לפי א') $\alpha \neq 0$.

קבוצת הערכים העצמיים של העתקה לינארית $T$ נקראת **הספקטרום של** $T$, ומסומנת $\sigma(T)$. באופן דומה מגדירים את $\sigma(A)$ עבור מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

**1.18 תרגיל**. א. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח: $\sigma(AB) = \sigma(BA)$. [רמז: $A(BA)v = (AB)Av$. יש לטפל בנפרד במקרה $Av = 0$]

ב. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח: $\sigma(A) = \sigma(A^t)$. [רמז: בעזרת דטרמיננטה]

פתרון:

א.

$\underline{\underline{Av\neq 0}}:$ $\lambda$ ע"ע של $BA$ $\Leftrightarrow \exists v\neq 0: BAv=\lambda v \Leftrightarrow \exists v\neq 0: \mathbf{A}(BA)v = A\lambda v=\lambda Av$

$\Leftrightarrow \exists Av\neq 0: (\mathbf{A}B)Av=\lambda Av \Leftrightarrow$ $\lambda$ ע"ע של $AB$

$\underline{\underline{Av=0}}: \Rightarrow BAv=0 \Leftrightarrow$ $\lambda$ ע"ע של $BA$ $\Leftrightarrow | BA-0I |=0 \Leftrightarrow |BA|=0 \Leftrightarrow |B||A|=0 \Leftrightarrow |AB|=0$

$\Leftrightarrow |BA-0I|=0 \Leftrightarrow$ $\lambda$ ע"ע של $AB$

וכנ"ל בכיון ההפוך

ב.

$\lambda$ פותר את הפולינום האופייני: $|\lambda I - A|=0 \Leftrightarrow$ $\lambda$ ע"ע של $A$

$$\left(\begin{array}{l}\text{אבל:}\\ 0=|\lambda I-A|=\left|(\lambda I-A)^t\right|=\left|(\lambda I)^t-(A)^t\right|=\left|\lambda I-(A)^t\right|\\ \text{ולכן:}\end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow \left|\lambda I-(A)^t\right|=0$ : $\lambda$ פותר את הפולינום האופייני $\Leftrightarrow$ $\lambda$ ע"ע של $A^t$