25.03.14 | 1

שיטות נומריות ותכנות מדעי - הרצאה 5

יציבות לינארית (פותח ע"י מתמטיקאי שוודי בשם Germund Dahlquist)

$y' = \lambda y$, $y(0)=1$; (פתרון $y(x)=e^{\lambda x}$)

הצבה "במודל"

אם $\lambda \in \mathbb{C}$, $y = \alpha + i\beta$

$\Leftarrow$ $\alpha' + i\beta' = (\lambda_1 + i\lambda_2)(\alpha + i\beta)$

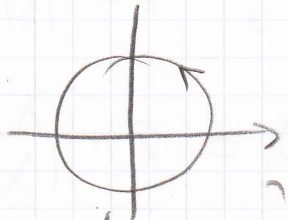
נחלק לכמה מקרים:

1. $Re\,\lambda > 0$ בעייתי כי $|y| \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$

הפתרון לא יציב - שואף ל-∞ מהר, מתפוצץ.
כל שגיאה נומרית תלך ותגדל בצורה אקספוננציאלית כי ככה מתנהג הפתרון.

2. $Re\,\lambda = 0$, מקרה גבולי, $\lambda = i\omega$

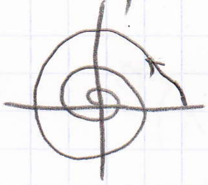
$y = e^{i\omega x}$



$|y|$ נשמר
חוק שימור

בשבוע הבא

3. $Re\,\lambda < 0$ נדרוש $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$



* נקרא לשיטה נומרית יציבה אם הגבול

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

דוגמא: אוילר, $y' = f(y)$, $y(0)=1$

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1+h\lambda)\, y_n$$

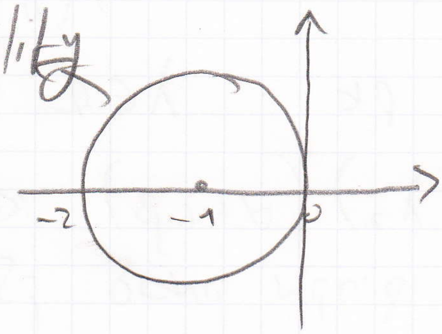
$$y_n = (1+h\lambda)^n y_0 = (1+h\lambda)^n$$

נסמן $z = h\lambda$ ונקבל $y_n = (1+z)^n$

$$y_n = (1+z)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

הסכימה יציבה אם $|1+z| < 1$

linear stability domain



הסכימה יציבה עבור $|1+\lambda h| < 1$

$\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ = אם λ ממשי אז $-1 < 1+\lambda h < 1$

$$-2 < \lambda h < 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - |\lambda| h > -2$$

$$0 < h < \frac{2}{|\lambda|} \qquad -|\lambda| h > -3$$

נקח לדוגמא: $h = \frac{2}{|\lambda|}$, λ ממשי

$$z = h\lambda = 2 \cdot \frac{\lambda}{|\lambda|} = -2$$

$$y_n = (-1)^n$$

שיטה נוספת - שיטה סתומה Backward Euler

$$y' = f(y)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1})$$

$$f(y) = \lambda y$$

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1}$$

25.03.14 (2)

$$\Rightarrow (1-h\lambda)\, y_{n+1} = y_n$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda}\, y_n$$

נסמן $z = h\lambda$ ונקבל

$$y_{n+1} = \frac{1}{1-z}\, y_n$$

ולכן

$$y_n = \frac{1}{(1-z)^n}$$

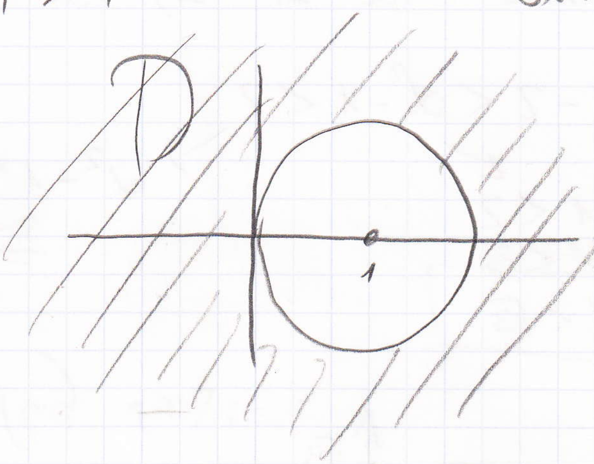
מתי $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$? , כאשר $\frac{1}{|1-z|} < 1$

h ממשי $\Rightarrow \quad |1-z| > 1$

הסכימה יציבה לכל n

זה נקרא A stable

$D \supset \{z : \mathrm{Re}\, z < 0\}$



ERk 2 : midpoint

$$\begin{cases} \xi_1 = y_n + \frac{h}{2} f(y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h\, f(\xi_1) \end{cases}$$

$f = \lambda y$ המד"ר (הפוך שעון)

נסמן $z = h\lambda$

$$\xi_1 = y_n + \frac{h}{2}\lambda y_n = \left(1 + \frac{z}{2}\right) y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + \underbrace{h\lambda}_{z}\left(1+\frac{z}{2}\right)y_n = \left(1+z+\frac{1}{2}z^2\right)y_n$$

$$y_0 = 1 \;,\quad y_n = \left(1+z+\frac{1}{2}z^2\right)^n \underbrace{y_0}_{=1}$$

נקבל יציבות כאשר $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$

וזה קורה כאשר $\left|1+z+\frac{1}{2}z^2\right| < 1$

$$\Rightarrow \left|(1+z)^2+1\right| < 2$$

z סימטרי סביב -1 ולכן נכתוב $z=-1+i\alpha$

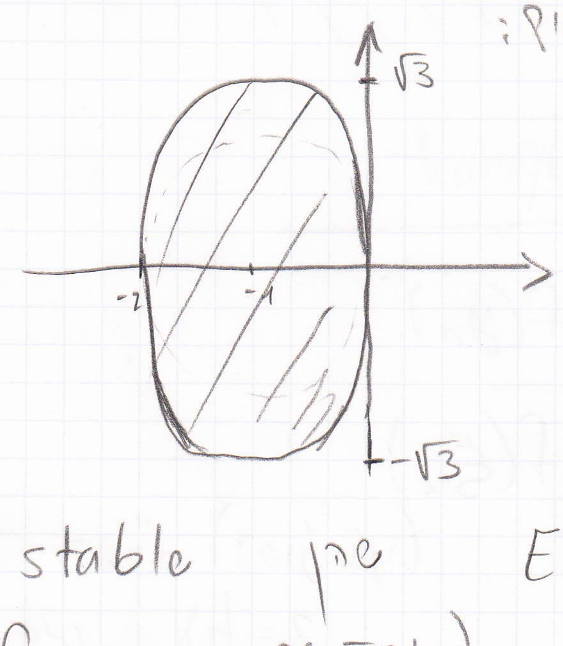
$$(1+z)^2+1 = -\alpha^2+1 \Rightarrow \left|\alpha^2-1\right| < 2$$

$$-2 < \alpha^2-1 < 2$$

$$\alpha^2-1 < 2$$
$$\alpha^2 < 3$$
$$\boxed{-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}}$$

$$\alpha^2-1 > -2$$
תמיד

בסה"כ נקבל תחום:



<u>מסקנה:</u> אין שיטות ERK שהן A stable

- שיטות גאוס-לג'נדר (IRK עם סדר מקסימלי) הן A stable

25.03.14 (3)

יציבות של מערכת משוואות

$$y' = Ay \qquad y \in \mathbb{R}^n$$
$$A \in M_n$$

נלכסן את המטריצה,

$$y' = P^{-1}\Lambda P y$$
$$(Py)' = \Lambda (Py)$$

נגדיר $\eta = Py$ ונקבל $\eta' = \Lambda \eta$

n משוואות לא מצומדות.

יציבות: תנאי היציבות צריך להתקיים לכל ע"ע λ_k.

מד"ר - פונ' ב-Matlab:

חשיבות	פקודה
יעילות	explicit ode-45
בעיה ביציבות	implicit ode-23

שינוי גודל צעד variable step size

$$y = f(y) = h \underbrace{J(y_n)}_{\text{יעקוביאן}} y + O(h^2)$$

אם המשוואה לא לינארית נעשה לינאריזציה

נדרוש בכל צעד שהסכימה תהיה יציבה.

נסתכל על הע"ע הגדול ביותר בכל הצעדים שעשינו

ode-45: מנסים להעריך את הע"ע ע"י פקודה במטלב

ה-ode45 מחזירה $[x_n, y_n]$.

הצעד לא אחיד, כל צעד מנסים עד ok.

ode45 מיישם שיטה של המתמטיקאים Dormand-Prince

שהיא, ERK עם 7 שלבים.

ע"מ לעבור 2 סכימות שונות

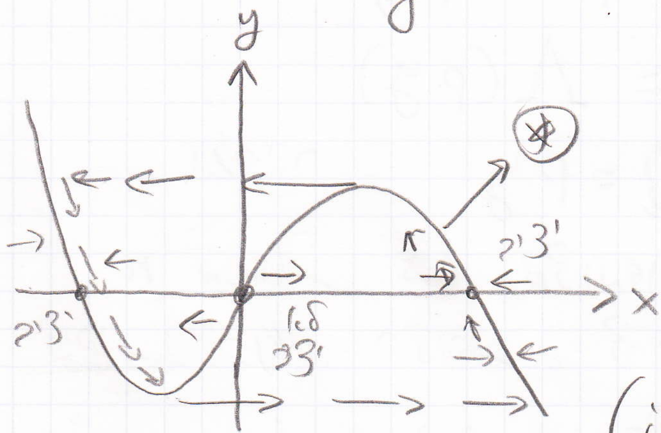
(1) ERK סדר 4

(2) ERK סדר 5.

פוזנמאי

$$\begin{cases} \dot{y} = -1-y+8x^3 \\ \dot{x} = w(\underbrace{-y+x-x^3}) \end{cases} \qquad w \gg 1$$

$$y \approx x - x^3$$



relaxation oscillator

נרצה להשתמש בפתרון סתום (implicit).

implicit משתמע
explicit מפורש

שגיאה לוקלית — $\frac{1}{h}$, שגיאה גלובלית — יש לנו מס' קטן של צעדים ימינה, אך יש לנו שגיאה גדולה היא לא תצטבר כי רוב הזמן נעים ב(*).

נתבונן ב: $\operatorname{Re}\lambda = 0$ $\quad \lambda = i$

$$z'(t) = i\,z(t) \qquad z'(0) = z_0$$

$$z(t) = e^{it} z_0 \;;\; z(t) = x(t) + i\,y(t)$$

$$x' + iy' = i(x+iy)$$

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} ; \quad \left.\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right\}$$ עם התחלה

$$x'' = -x \qquad |z(t)|^2 = |z_0|^2$$

$$I(t) = x^2(t) + y^2(t)$$

$$I' = 2xx' + 2yy' = 2x(-y) + 2yx = 0$$

25.03.14 (4)

(להלן F.E) Forward Euler

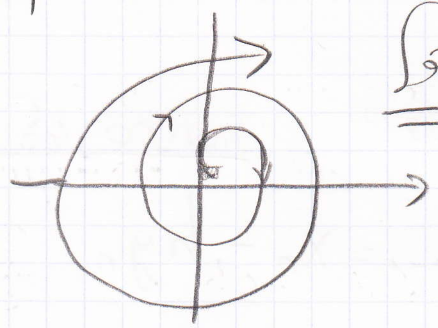
$$z_{n+1} = z_n + h f(z_n) = z_n + h i z_n$$

$$\Rightarrow \quad z_{n+1} = (1+hi) z_n$$

$$\Rightarrow \quad z_n = (1+hi)^n z_0$$

$$\Rightarrow \quad |z_n| = \underbrace{|1+hi|}_{\geq 1}^n \cdot |z_0|$$

N - מס' הצעדים סה"כ. $h = \frac{T}{N}$



גדל

בזמן $t=T$ נקח $z_0 = 1$, $|z_n| = (1+ih)^n \cdot \overset{=1}{z_0}$

$$|z_n| = \sqrt{1+h^2}^{\,n} = (1+h^2)^{\frac{n}{2}} = \left(1+\frac{T^2}{h^2}\right)^{\frac{n}{2}} \sim$$

$$\sim 1 + \frac{T}{h} e^{\frac{T}{2}} + O(h^2) = 1 + h e^{\frac{T}{2}} + O(h^2)$$

ובגבול $h \to 0$ זה שואף ל 1.

F.E: לא משנה מהו גודל הצעד תמיד השגיאה תגדל כך שהרדיוס גדל.

(להלן B.E) Backward Euler

$$z_{n+1} = z_n + h f(z_{n+1})$$

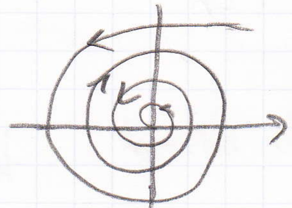
$$\Rightarrow \quad z_{n+1} = z_n + i h z_{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad (1-ih) z_{n+1} = z_n$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{1-ih} z_n \Rightarrow \quad z_n = \frac{1}{(1-ih)^n} \cdot z_0$$

$$|z_n| = \left(\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\right)^n |z_0|$$

$$|z_n| = (1+h^2)^{-n/2} |z_0| \underset{\substack{n \gg 1 \\ h=I}}{\sim} 1 - h e^{T/2} + O(h^2)$$



מבורה של סטורמר

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - h y_n & \text{עבור } x: \\ y_{n+1} = y_n + h x_{n+1} & \text{עבור } y: \end{cases} \qquad \begin{matrix} F.E \\ B.E \end{matrix} \begin{Bmatrix} x' = -y \\ y' = x \end{Bmatrix}$$

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n - h y_n) = y_n + h x_n - h^2 y_n$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ h & 1-h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

נקרא

Semi-implicit Euler

או

Symplectic Euler

$$|z_{n+1}|^2 = x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (x_n - h y_n)^2 + (y_n + h x_n - h^2 y_n)^2$$

$$= \underbrace{x_n^2 + y_n^2}_{=|z_n|^2} - \cancel{2h x_n y_n} + \cancel{2h x_n y_n} + h^2 (y_n^2 + x_n^2 - 2y_n^2)$$

$$- 2h^3 x_n y_n + h^4 y_n^2$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}|^2 = \underbrace{|z_n|^2}_{I_n} + h^2(x_n^2 - y_n^2) - 2h^3 x_n y_n + h^4 y_n^2$$

25.03.14 (5)

נזכיר:

$$R_n = x_n^2 + y_n^2 - h x_n y_n$$

$$\Rightarrow \quad R_{n+1} = I_{n+1} - h x_{n+1} y_{n+1} =$$

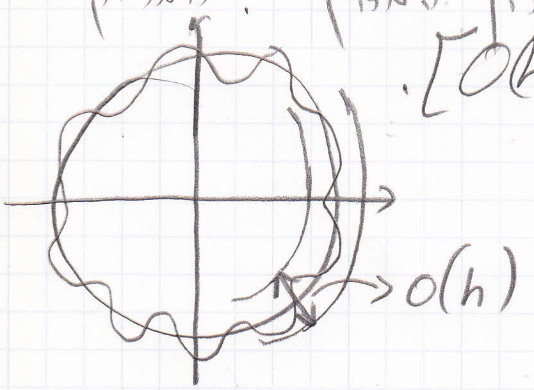
$$= I_n + h^2 x_n^2 - h^2 y_n^2 - 2h^3 x_n y_n + h^4 h^2$$

$$- h \underbrace{(x_n - h y_n)(y_n + h x_n - h^2 y_n)}_{x_n y_n - h y_n^2 + h}$$

ולאחר צמצום:

$$\Rightarrow \boxed{R_{n+1} = R_n}$$

– ז"א לסכימה המעורבת יש חוק שימור דיסקרטי והוא שונה מחוק השימור של הפתרון המדויק. המרחק בניהם מסדר גודל של h, $[O(h)]$.



– חוק השימור מקבל הפרעה המבוטא בתוספת מגודל h $(-h x_n y_n)$ ב-R_n.

ל F.E (מתפרקת החוצה) ! B.E (מתכנסת פנימה) אין חוק שימור.

אך המשוואה מהצורה

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x) \end{cases}$$

יש לה באמת סכמה פתוחה.