דטרמיננטה:

A מטריצה, נגדיר סקלר שנסמן: $|A|$ או ב־$\det A$ ונקרא הדטרמיננטה של A. באמצעות הסקלר הזה, נוכל לקבוע האם A היא הפיכה, ובהמשך גם למצוא את ההופכית.

ראינו שאם: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אז: $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. ההנחה היא ש: $ad-bc\neq 0$. במילים אחרות, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ הפיכה אם ורק אם $ad-bc\neq 0$ (וגם יש לנו "נוסחה" למצוא את ההופכית).

אכן, כאשר A ריבועית מסדר 2, נגדיר: $ad-bc=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. נשים לב: A הפיכה אם ורק אם $|A|\neq 0$.

נרצה להגדיר את הדטרמיננטה של A מכל סדר, כך שתקיים: A הפיכה אם ורק אם $|A|\neq 0$.

כדי להגדיר את הדטרמיננטה, נגדיר את המושג של תמורה.

תמורות:

פונקציה: $f:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n\}$ חח"ע ועל נקראת תמורה (של n איברים). את קבוצת כל התמורות נסמן: S_n.

הערה:

1. באופן כללי, את קבוצת הפונקציות החח"ע ועל $f:X\to X$ נסמן: S_X.
2. $|S_n|=n!$.

אנחנו יכולים לסמן תמורות באופן הבא. ראשית, אפשר לסמן תמורה בעזרת מטריצה $2\times n$, בשורה הראשונה האיברים $1,2,\ldots,n$ ובשורה השניה התמונות שלהם. כלומר:

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ f\left(1\right) & f\left(2\right) & \ldots & f\left(n\right)\end{pmatrix}$$

למשל:

$$S_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\}=\{id\}$$

$$S_2=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$S_3=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

שנית, אם: $a_1\mapsto a_2\mapsto\ldots\mapsto a_k\mapsto a_1$ (סדרת איברים שהפונקציה שולחת כל אחד מהם לבא אחריו, ואת האחרון חזרה לראשון), נקרא לסדרה הזו מחזור ונסמן: $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \ldots & a_k\end{pmatrix}$. למשל:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

את האיברים שלא זזים, אין צורך לסמן. נשים לב שכך אנו לא יודעים לאיזו S_n שייכת התמורה, ואם זה חשוב נציין זאת לפני. בדוגמה שלנו, $\begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 6\end{pmatrix}\in S_7$. כמו כן, מבחינת הסימון, אפשר להתחיל מכל איבר בסדרה, למשל: $\begin{pmatrix}5 & 6 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 6\end{pmatrix}$. מצד שני,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

שלישית, כל תמורה מורכבת מכמה מחזורים, ונסמן זאת כמכפלה של המחזורים.

יתר על כן, אפשר לקחת את המחזורים כזרים – שאין להם איברים משותפים.

למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

מכפלת המחזורים מתארת הרכבה של פונקציות. דוגמה נוספת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

נשים לב שאם המחזורים זרים, אפשר להחליף את הסדר במכפלה. אם המחזורים לא זרים, זה לא בהכרח נכון. למשל, ב־S_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

כדי להבין מהי התמורה, נבדוק לאן הפונקציה הזו שולחת כל איבר:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}(1) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}(3) = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}(2) = 1$$

נשים לב ש: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. מצד שני:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}(1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}(2) = 3$$

ואכן: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}(1) \neq \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}(1)$, כלומר התמונות של 1 שונות, ולכן: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$.

<u>סימן של תמורה:</u>

נאמר שהאורך של המחזור $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix}$ הוא k. הסימן של מחזור $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix}$ הוא $(-1)^{k-1}$. למשל, הסימן של $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ הוא $(-1)^{2-1} = -1$. הסימן של $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ הוא $(-1)^{3-1} = 1$.

נסמן תמורות באותיות: $\sigma, \tau \in S_n$. באופן כללי, אם $\sigma = \tau_1\tau_2$, אז: $sign(\sigma) = sign(\tau_1)\, sign(\tau_2)$. לכן, אם נרצה לחשב סימן של תמורה, נפרק אותה למכפלת מחזורים ונכפיל את הסימנים שלהם.

למשל:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$sign(\sigma) = sign\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}\right) sign\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}\right) = (-1)^{4-1}(-1)^{3-1} = -1$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$sign(\sigma) = (-1)^{2-1}(-1)^{2-1}(-1)^{3-1} = 1$$

<u>הגדרת הדטרמיננטה:</u>

תהי A מטריצה ריבועית מסדר n. הדטרמיננטה של A מוגדרת כך:

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} sign\left(\sigma\right) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$$

נרשום מפורשות את הנוסחה עבור $n=2$ ועבור $n=3$.

עבור $n=2$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$. כמו כן, $S_2=\left\{\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2\end{pmatrix},\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}\right\}$,
ובסכום יהיו שני איברים:

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} sign\left(\sigma\right) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} =$$

$$sign\left(\sigma\right) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}+sign\left(\tau\right) a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)} = sign\left(\sigma\right) a_{11}a_{22}+sign\left(\tau\right) a_{12}a_{21}$$

כאן, $sign\left(\sigma\right) = sign\left((1)\left(2\right)\right) = 1, sign\left(\tau\right) = sign\left(\begin{pmatrix} 1 & 2\end{pmatrix}\right) =$
-1, וסה"כ: $|A| = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

עבור $n=3$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$. כמו כן, איברי S_3 הם:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\sigma_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\sigma_4=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\sigma_5=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\sigma_6=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

בכתיב מחזורים:

$$\sigma_1=id,\sigma_2=\begin{pmatrix} 1 & 2\end{pmatrix},\sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

הסימנים הם:

$$sign\left(\sigma_1\right) = sign\left(\sigma_5\right) = sign\left(\sigma_6\right) = 1$$

$$sign\left(\sigma_2\right) = sign\left(\sigma_3\right) = sign\left(\sigma_4\right) = -1$$

נקבל:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} sign\left(\sigma\right) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)} =$$

$$sign\left(\sigma_1\right) a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)}a_{3\sigma_1(3)} + sign\left(\sigma_2\right) a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)}a_{3\sigma_2(3)}+$$

$$+sign\left(\sigma_3\right) a_{1\sigma_3(1)}a_{2\sigma_3(2)}a_{3\sigma_3(3)} + sign\left(\sigma_4\right) a_{1\sigma_4(1)}a_{2\sigma_4(2)}a_{3\sigma_4(3)}$$

$$+sign\left(\sigma_5\right) a_{1\sigma_5(1)}a_{2\sigma_5(2)}a_{3\sigma_5(3)} + sign\left(\sigma_6\right) a_{1\sigma_6(1)}a_{2\sigma_6(2)}a_{3\sigma_6(3)}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

נשים לב, שבכל מחובר מופיע איבר מכל שורה ואיבר מכל עמודה; לכן, אם במטריצה יש שורת אפסים או עמודת אפסים, הדטרמיננטה תתאפס.

כעת, נוכיח טענות שונות לגבי הדטרמיננטה, עד שנגיע אל המסקנה המיוחלת: A הפיכה אם ורק אם $|A| \neq 0$.

ראשית, נדגיש ש: $|A+B|$ לא בהכרח שווה ל־$|A|+|B|$, למשל: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. מצד אחד, $|A| = 0, |B| = -2$. מצד שני, $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, ולכן: $|A+B| = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = -1$, ואכן: $|A+B| \neq |A|+|B|$. מה כן עובד? $|AB| = |A| \cdot |B|$.

אף על פי כן, מתקיימת התכונה הבאה:

$$\begin{vmatrix} -v_1- \\ -v_2- \\ \vdots \\ -v_i- \\ \vdots \\ -v_n- \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -v_1- \\ -v_2- \\ \vdots \\ -u_i- \\ \vdots \\ -v_n- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -v_1- \\ -v_2- \\ \vdots \\ -u_i+v_i- \\ \dots \\ -v_n- \end{vmatrix}$$

כלומר, אם כל השורות זהות חוץ משורה אחת, אפשר לפרק את הדטרמיננטה של הסכום לסכום של דטרמיננטות. למשל:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 9 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 13 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

סכום בשורה השניה, שאר השורות זהות. הוכחה בסיכום.

תכונה שניה:

$$\begin{vmatrix} -v_1- \\ -v_2- \\ \vdots \\ -\alpha v_i- \\ \vdots \\ -v_n- \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} -v_1- \\ -v_2- \\ \vdots \\ -v_i- \\ \vdots \\ -v_n- \end{vmatrix}$$

כלומר, כפל שורה בסקלר מכפיל את הדטרמיננטה באותו הסקלר.

<u>הוכחה:</u>

נסמן: $B = \begin{pmatrix} -v_1- \\ -v_2- \\ \vdots \\ -\alpha v_i- \\ \vdots \\ -v_n- \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -v_1- \\ -v_2- \\ \vdots \\ -v_i- \\ \vdots \\ -v_n- \end{pmatrix}$, צ"ל: $|B| = \alpha |A|$. אם כן:

$$|B| = \sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \ldots b_{i\sigma(i)} \ldots b_{n\sigma(n)}$$

נשים לב שאם $k \neq i$, אז: $b_{kj} = a_{kj}$, וגם: $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, ולכן:

$$= \sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \ldots \alpha a_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \alpha \left(\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} \right) = \alpha |A|$$

כנדרש.

<u>מסקנה:</u>

אם A מסדר n, כשמכפילים את A ב־α, מכפילים n שורות ב־α ולכן הדטרמיננטה מוכפלת ב־α n פעמים, כלומר:

$$|\alpha A| = \alpha^n |A|$$

בפרט: $|-A| = (-1)^n |A|$.

אם כן, פעולת השורה: $R_i \to \alpha R_i$ מכפילה את הדטרמיננטה ב־α. איך משפיעות פעולות השורה האחרות על הדטרמיננטה?

משפט:

תהי B המטריצה המתקבלת מהמטריצה A ע"י פעולת השורה ρ, כלומר: $\rho(A) = B$.

1. אם $\rho : R_i \leftrightarrow R_j$, אז: $|B| = -|A|$, כלומר החלפת שורה מחליפה את הסימן של הדטרמיננטה.
2. $\rho : R_i \to \alpha R_i$, אז: $|B| = \alpha |A|$, כלומר כפל שורה בסקלר מכפיל את הדטרמיננטה בסקלר.
3. $\rho : R_i \to R_i + \alpha R_j$, אז: $|B| = |A|$, כלומר הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת לא משנה את הדטרמיננטה.

הוכחה:

את 2 כבר הוכחנו.

נוכיח את 1. השורות שהתחלפו הן i, j. לפי ההגדרה:

$$|B| = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \dots b_{i\sigma(i)} \dots b_{j\sigma(j)} \dots b_{n\sigma(n)}$$

$$== \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \dots a_{j\sigma(i)} \dots a_{i\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

זו "כמעט" הדטרמיננטה של A. מה ההבדל? האינדקסים $\sigma(i), \sigma(j)$ "הפוכים". התמורה בכל מחובר היא σ שהחלפנו בה גם את האיברים במקומות ה־i, j, כלומר התמורה היא מכפלה של σ ושל חילוף של שני איברים, ולכן הסימן שלה הוא המכפלה של הסימנים של σ ושל חילוף. הסימן של חילוף הוא -1 (מחזור מאורך 2), ולכן הסימן של התמורה על האינדקסים הוא $-sign(\sigma)$, ולכן:

$$\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\dots a_{j\sigma(i)}\dots a_{i\sigma(j)}\dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} -sign(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\dots a_{j\sigma(j)}\dots a_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= -\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\dots a_{j\sigma(j)}\dots a_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)} = -|A|$$

כנדרש.

<u>מסקנה:</u>

אם ב־A יש שתי שורות זהות, $|A| = 0$; אם R_i, R_j זהות, נקבל: $|A| = -|B|$ כאשר B מתקבלת מ־A ע"י: $\rho : R_i \leftrightarrow R_j$, אבל השורות זהות ולכן: $A = B$ ולכן גם: $|B| = |A|$. סה"כ, $|A| = -|A|$, כלומר: $|A| = 0$.

נחזור להוכחת המשפט – נוכיח את 3. נסמן:

$$A=\begin{pmatrix}-v_1-\\-v_2-\\\vdots\\-v_i-\\\vdots\\-v_n-\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-v_1-\\-v_2-\\\vdots\\-v_i+\alpha v_j-\\\vdots\\-v_n-\end{pmatrix}$$

צ"ל: $|B|=|A|$. אם כן:

$$|B|=\begin{vmatrix}-v_1-\\-v_2-\\\vdots\\-v_i+\alpha v_j-\\\vdots\\-v_n-\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-v_1-\\-v_2-\\\vdots\\-v_i-\\\vdots\\-v_n-\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-v_1-\\-v_2-\\\vdots\\-\alpha v_j-\\\vdots\\-v_n-\end{vmatrix}=$$

$$=|A|+\alpha\begin{vmatrix}-v_1-\\-v_2-\\\vdots\\-v_j-\\\vdots\\-v_n-\end{vmatrix}=|A|+\alpha\cdot 0$$

במחובר הימני יש שתי שורות זהות – v_j מופיעה גם בשורה ה־j וגם בשורה ה־i, ולכן הדטרמיננטה שווה ל־0. סה"כ, $|B|=|A|$, כנדרש.

אם כן, ברמה הטכנית, אם רוצים לחשב דטרמיננטה אפשר לדרג את המטריצה, ואנו יודעים איך משפיעות הפעולות. נשארנו עם השאלה – מהי הדטרמיננטה במקרה של מטריצה מדורגת?

<u>טענה:</u>

אם A משולשית (עליונה), הדטרמיננטה שלה שווה למכפלת איברי האלכסון.
לכן, אם נרצה לחשב דטרמיננטה, נוכל לעשות זאת באופן הבא – נדרג, ונזכור איך השפיעו פעולות הדירוג שלנו על הדטרמיננטה; כשנגיע לצורה מדורגת – משולשית – הדטרמיננטה תהיה מכפלת איברי האלכסון. לכן, כדאי להשתמש רק בפעולה של הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת, מכיוון שהיא לא משנה את הדטרמיננטה. למשל:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 15 & 3 \\ 9 & 9 & 4 & 9 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & -32 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -18 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} =$$

הגענו למטריצה משולשית, ולכן:

$$= 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-18) = 18$$

<u>הוכחת הטענה:</u>

נוכיח למטריצה משולשית עליונה (עובד גם לתחתונה). לפי הנוסחה:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} sign\left(\sigma\right) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

מכיוון ש־A משולשית עליונה, אם $i < j$ אז: $a_{ij} = 0$. אם $\sigma \neq id$, מכיוון ש: $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ חח"ע ועל, בהכרח קיים i עבורו: $i < \sigma\left(i\right)$, ולכן: $a_{i\sigma(i)} = 0$. מכאן, בכל אחד מהמחוברים בסכום חוץ מהמחובר $\sigma = id$, יש איבר ששווה ל־0 ולכן כולם מתאפסים, כלומר:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} sign\left(\sigma\right) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} = sign\left(id\right) a_{1id(1)} \ldots a_{nid(n)} = a_{11} \ldots a_{nn}$$

וזו מכפלת איברי האלכסון.

<u>מסקנה:</u>

A הפיכה אם ורק אם $|A| \neq 0$. אכן, A הפיכה אם ורק אם בצורה המדורגת אין שורות אפסים אם ורק אם איברי האלכסון בצורה המדורגת שונים מ־0 אם ורק אם $|A| \neq 0$.