בהמשך לשיעור הקודם:

למה

אם $a_n \to a$ אז לכל סדרה $k_n \to \infty$ כש $k_n \in \mathbb{N}$ (לא בהכרח עולה) מתקיים $a_{k_n} \to a$.

טורים - סיום

משפט רימן

יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי. אזי:

א. לכל $-\infty \le s \le \infty$, יש סידור מחדש של אברי הטור כך שסכומו יהיה s.

ב. יש גם סידור כך שהטור אינו מתכנס אפילו במובן הרחב.

הוכחה

המקרה $-\infty < s < \infty$. יהיו $\sum p_n, \sum q_n$ הטורים החיוביים המתאימים ל$\sum a_n$. כיוון ש-$\sum a_n$ מתכנס בתנאי, $\sum p_n = \sum q_n = \infty$ ולכן גם כל זנב שלהם – סכומו ∞. יהי m_1 הראשון כך ש $s \le t_1 := p_1 + \cdots + p_{m_1}$.

$\Leftarrow$(בגלל שזה הראשון) $t_1 - p_{m_1} = p_1 + \cdots + p_{m_1 - 1} < s \Leftarrow t_1 - s < p_{m_1}$.

יהי k_1 הראשון כך ש- $s \ge \overbrace{t_1 - \left(q_1 + \cdots + q_{k_1}\right)}^{t_2}$.

$\overset{k_1\text{ ראשון}}{\Leftarrow} s - t_2 < q_{k_1}$. יהי $m_2 > m_1$ הראשון כת ש- $s \le \overbrace{t_2 + (p_{m_1+1} + \cdots + p_{m_2})}^{t_3}$.

$\Leftarrow t_3 - s < p_{m_2}$.

יהי $k_2 > k_1$ הראשון כך ש- $s \ge \overbrace{t_3 - \left(q_{k_1+1} + \cdots + q_{k_2}\right)}^{t_4}$

$\Leftarrow s - t_4 < q_{k_2}$, וכו' קיבלתי טור: (נסמן אותו ב*)

$$\left(p_1 + \cdots + p_{m_1}\right) + \left(-q_1 - \cdots - q_{k_1}\right) + \left(p_{m_1+1} + \cdots + p_{m_2}\right) + \left(-q_{k_1+1} - \cdots - q_{k_2}\right) + \cdots$$

בטור זה מופיעים כל האיברים p_n וכל האיברים q_n כל אחד פעם אחת בדיוק. נניח ל]שטות ש- $a_n \neq 0$ לכל n (הוספת השמטת אפסים לא משנה את סכום הטור) לכן הטור,

$$p_1 + \cdots + p_{m_1} + (-q_1) + \cdots + \left(-q_{k_1}\right) + \cdots$$

אם נתעלם מהאפסים, הוא סידור מחדש של הטור $\sum a_n$.

למה(סוף השיעור הקודם): הורדת סוגריים מטור מתכנס אשר בכל סוגריים שלו האיברים מאותו סימן אינה משנה את סכומו.

לכן נותר להראות שהטור (*) מתכנס ל-s. סדרת הסכומים החלקיים של טור היא t_n.

לכל n:

$$0 \le t_{2n-1} - s < p_{m_n}$$

$$0 \le s - t_{2n} < q_{k_n}$$

$\sum a_n$ מתכנס לכן $a_n \to 0$.

$$0 \le p_n, q_n \le |a_n| \to 0 \Rightarrow p_n, q_n \to 0$$

$$\overset{\text{סנדוויץ'}}{\Leftarrow} t_{2n-1} - s, s - t_{2n} \to 0 \Rightarrow t_{2n-1}, t_{2n} \to s \Rightarrow t_n \to s.$$

המקרים הנותרים, בקצרה:

$s=\infty$: בצעד אי זוגי נוסיף p_n-ים עד שהסכום $n \geq$. בצעד זוגי נחסר רק q_n אחד. כיוון ש-$q_n \to$ 0, הסכום שנקבל יתכנס ל-∞.(תרגיל) $s=-\infty$: דומה.

ב. בשלב $2n-1$ נסדר שהסכום $n \geq$. בשלב $2n$ נסדר שהסכום $\geq -n$.

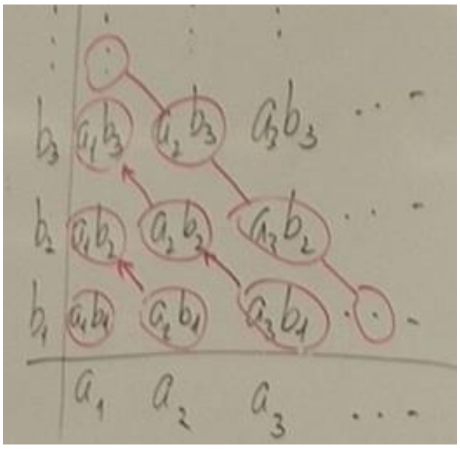
דוגמה

יש פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חח״ע ועל כך ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{f(n)}}{\sqrt{f(n)}}=\frac{\pi+\sqrt{2}}{e}$$

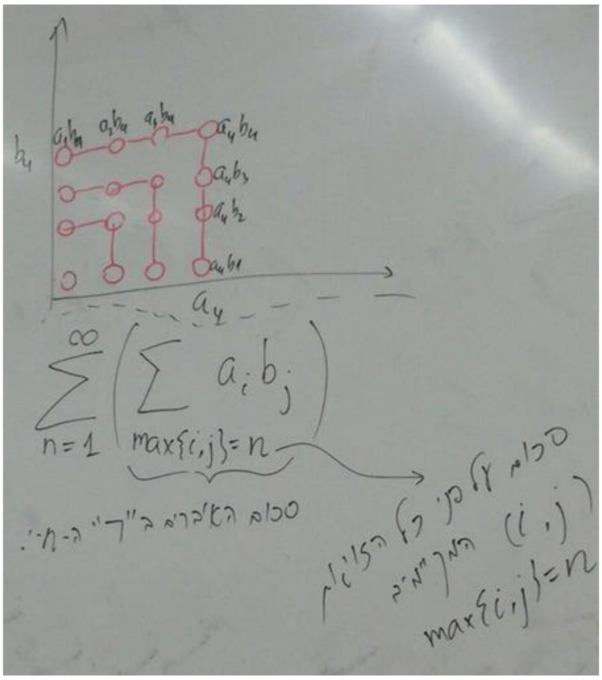
הטור מתכנס בתנאי לפי לייבניץ ולכן לפי רימן קיימת פונק׳ כנ״ל.

מכפלות טורים



$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i b_{n-i}\right)}_{}$$

סכום איברי האלכסון ה n-1



למה

אם $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים, אז

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\max\{i,j\}=n} a_i b_j\right) = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$$

הוכחה

הסכום החלקי של הטור השמאלי הוא

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\max\{i,j\}=k} a_i \cdot b_j = \sum_{i,j\le n} a_i \cdot b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) \to \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$$

מסקנה

אם $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים בהחלט, אז הטור בלמה הקודמת מתכנס בהחלט.

הוכחה

$\sum |a_n|, \sum |b_n|$ מתכנסים ולכן מהלמה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\max\{i,j\}=n} \overbrace{|a_i| \cdot |b_j|}^{|a_i \cdot b_j|} = \sum |a_n| \cdot \sum |b_n|$$

■

מסקנה

כשהטורים מתכנסים בהחלט, לא משנה סדר סכימת המכפלות, בפרט,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_{n-i} = \left(\sum a_n\right) \cdot \left(\sum b_n\right)$$

דוגמה

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1} =? \; (0 < q < 1)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$מתכנס בהחלט (חיובי והנדסי). מהמסקנה:

$$\left(\frac{q}{1} - q\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{q^i q^{n-i}}_{q^n} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot q^n \overset{k=n-1}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k+1}$$
$$= q^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}$$

הערה

המסקנה האחרונה אינה נכונה באופן כללי כאשר הטורים אינם מתכנסים בהחלט: בדקו את המקרה: $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$