חבורות p

טענה

החבורה הפשוטה היחידה מסדר 60 היא A_5.

הערה

חבורות פשוטות מאותו הסדר לא בהכרח איזומורפיות.

למשל, $\mathrm{A}_8, \mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_4)$ פשוטות מאותו הסדר, אך אינן איזומורפיות.

תרגיל

הוכח בעזרת המרכז של חבורות 2–סילו.

הוכחה (לטענה)

תהי G חבורה פשוטה מסדר 60.

מתקיים:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

לכן:

$$n_2 = 1,3,5,15$$

$$n_3 = 1,4,10$$

$$n_5 = 1,6$$

אדום - נפסל משום שתת-חבורת p-סילו יחידה היא נורמלית.

כחול – נפסל עפ"י העידון של משפט קיילי.

נניח כי $n_2 = 15$.

לכן, לא יתכן כי כל שתי תת-חבורות 2-סילו אינן נחתכות (באופן לא טריוויאלי), משום ש: $20 + 24 + 45 > 60$.

לכן, קיימות תת-חבורות 2-סילו שונות, P, P' כך ש:

$$Q = P \cap P' \neq 1$$

P, P' מסדר 4, לכן הן אבליות.

לכן, $P, P' \subseteq C_G(Q)$.

עפ"י כפליות האינדקס:

$$[G : C_G(Q)] \quad | \quad [G : P]$$

$$| \quad 15$$

לכן:

$$[G : C_G(Q)] \quad = \quad 1,3,5,15$$

לכן: $[G : C_G(Q)] \neq [G : P]$

אדום - נפסל משום שאז $Q \subseteq Z(G)$, אך G פשוטה.

כחול - נפסל עפ"י העידון של משפט קיילי.

ירוק – נפסל משום שאז $C_G(Q) = P$, לכן $P' = P$, אך P, P' שונות.

לכן, $C_G(Q)$ או $N_G(P_2)$ מאינדקס 5.

לכן, עפ"י משפט העידון של קיילי, קיים שיכון $G \hookrightarrow S_5$.

לכן, G, A_5 תת-חבורות נורמליות של S_5 (מאינדקס 2), ואם הן שונות, עפ"י משפט האיזומורפיזם השני: $A_5 \lhd G \cap A_5$, אך A_5 פשוטה.

$\blacksquare$

דוגמה

נוכח כי חבורה מסדר 90 אינה פשוטה.

נניח בשלילה כי G חבורה פשוטה מסדר 90.

מתקיים:

$$90 \quad = \quad 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

לכן:

$$n_2 = 1,3,5,9,15,45$$

$$n_3 = 1,10$$

$$n_5 = 1,6$$

אדום - נפסל משום שתת-חבורת p-סילו יחידה היא נורמלית.

כחול – נפסל עפ״י העידון של משפט קיילי.

$n_5 = 6$, לכן עפ״י העידון של משפט קיילי, קיים שיכון:

$$G \hookrightarrow \mathrm{S}_6$$

נניח בשלילה כי $G \nsubseteq \mathrm{A}_6$.

עפ״י משפט האיזומורפיזם השני, $G \cap \mathrm{A}_6 \trianglelefteq G$, ומתקיים:

$$G/_{G \cap \mathrm{A}_6} \cong {G \cdot \mathrm{A}_6}/_{\mathrm{A}_6}$$

$$\cong \mathrm{S}_6/_{\mathrm{A}_6}$$

$$\Downarrow$$

$$|G \cap \mathrm{A}_6| = \frac{|G|}{2}$$

לכן, $G \vartriangleleft G \cap \mathrm{A}_6 \neq G$, $\{\mathrm{id}\}$, בסתירה לכך ש - G פשוטה.

לכן, $G \subseteq \mathrm{A}_6$.

כלומר, קיים שיכון:

$$G \hookrightarrow \mathrm{A}_6$$

A_6 פשוטה, ועפ״י משפט לגרנז׳:

$$[\mathrm{A}_6 : G] = 4$$

לכן, עפ״י משפט העידון של קיילי, קיים שיכון:

$$\mathrm{A}_6 \hookrightarrow \mathrm{S}_4$$

אולם:

$$\frac{6!}{2} \nmid 4!$$

סתירה.

לכן, G אינה פשוטה.

$\blacksquare$

מכפלה ישרה

מוטיבציה

איך נראית חבורה מסדר 15 ?

מתקיים :

$$15 = 3 \cdot 15$$

לכן :

$$n_3 = 1$$

$$n_5 = 1$$

לכן, קיימות תת-חבורות נורמליות $P, Q \lhd G$ כך ש : $P \cong \mathbb{Z}_3$ ו - $Q \cong \mathbb{Z}_5$.

הגדרה

תהיינה A, B חבורות.

המכפלה הישרה החיצונית של A ו $-$ B היא $A \times B$.

הערה

נתבונן בתת-החבורות של המכפלה הישרה החיצונית :

$$A \times 1$$

$$1 \times B$$

מתקיים : $A \times 1 \cong A, 1 \times B \cong B$, שתיהן נורמליות, החיתוך שלהן טריוויאלי ומכפלתן היא כל החבורה.

הגדרה

תהי G חבורה.

תהיינה $A, B \leq G$ תת-חבורות.

G היא **מכפלה ישרה פנימית** של A ו $-$ B אם :

$$\begin{aligned} A &\lhd G \\ B &\lhd G \\ A\cap B &= 1 \\ AB &= G \end{aligned}$$

מכאן נובע כי:

$$|AB| = |A|\cdot|B|$$

הערה

מכפלה ישרה חיצונית היא מכפלה ישרה פנימית.

משפט

תהי G חבורה.

תהיינה $A,B\leq G$ תת-חבורות.

אם G מכפלה ישרה פנימית של A ו - B, אז:

$$G \cong A\times B$$

הוכחה

נגדיר פונקציה:

$$f:A\times B\to G$$

לפי:

$$f(a,b) = ab$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} \operatorname{im} f &= AB \\ &= G \end{aligned}$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(a,b)\in A\times B \mid a=b^{-1}\} \\ &= (1,1) \end{aligned}$$

נחשב:

$$A \ni a\cdot(bab^{-1})^{-1} = aba^{-1}b^{-1} = (aba^{-1})b^{-1} \in B$$

לכן:

$$aba^{-1}b^{-1} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$ab = ba$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} f\big((a,b)\cdot(a',b')\big) &= f(aa',bb') \\ &= aa'bb' \\ &= aba'b' \\ &= f(a,b)\cdot f(a',b') \end{aligned}$$

לכן:

$$G \cong A\times B$$

$$\blacksquare$$

מסקנה

כל חבורה מסדר 15 איזומורפית ל - $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_{15}$.

משפט

חבורה סופית G איזומורפית למכפלה ישרה של חבורות p (כאשר ה - p-ים שונים) אם ורק אם כל תת-חבורות p-סילו שלה נורמליות.

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח כי:

$$G \cong \mathcal{P}_{p_1}\times\cdots\times\mathcal{P}_{p_n}$$

כאשר לכל $1\le i\le n$, $\mathcal{P}_{p_i}$ חבורת p_i, ולכל $1\le i\ne j\le n$, $p_i\ne p_j$.

לכל $1 \leq i \leq n$, נסמן: $\left|\mathcal{P}_{p_i}\right| = p_i^{t_i}$.

אזי:

$$|G| \quad = \quad p_1^{t_1} \cdots p_n^{t_n}$$

לכן, לכל $1 \leq i \leq n$, חבורת p_i-סילו של G היא מסדר $p_i^{t_i}$.

לכן, $\mathcal{P}_{p_i}$ היא חבורת p_i-סילו של G.

G היא מכפלה ישרה חיצונית של $\left\{\mathcal{P}_{p_i}\right\}_{i=1}^{n}$, לכן היא מכפלה ישרה פנימית של $\left\{\mathcal{P}_{p_i}\right\}_{i=1}^{n}$, לכן $\mathcal{P}_{p_i}$ נורמלית.

לכן, כל תת-חבורות p-סילו של G נורמליות.

$\boxed{\Rightarrow}$

נניח כי כל תת-חבורות p-סילו של G נורמליות.

נניח כי:

$$|G| \quad = \quad p_1^{t_1} \cdots p_n^{t_n}$$

נוכיח באינדוקציה על n.

<u>בסיס: $n = 1$</u>

מתקיים:

$$G \quad = \quad \mathcal{P}_{p_1}$$

<u>צעד: $2 \leq n$</u>

מתקיים:

$$\mathcal{P}_{p_n} \quad \triangleleft \quad G$$

לכל $1 \leq i \leq n-1$:

$$\mathcal{P}_{p_i} \quad \triangleleft \quad G$$

לכן:

$$\mathcal{P}_{p_1} \cdots \mathcal{P}_{p_{n-1}} \quad \triangleleft \quad G$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{p_1}\cdots\mathcal{P}_{p_{n-1}}\cap\mathcal{P}_{p_n} &= 1 \\ \mathcal{P}_{p_1}\cdots\mathcal{P}_{p_{n-1}}\mathcal{P}_{p_n} &= G \end{aligned}$$

לכן:

$$G \cong \mathcal{P}_{p_1}\cdots\mathcal{P}_{p_{n-1}}\times\mathcal{P}_{p_n}$$

לכל $1\le i\le n-1$:

$$\mathcal{P}_{p_i} \lhd \mathcal{P}_{p_1}\cdots\mathcal{P}_{p_{n-1}}$$

לכן, עפ"י הנחת האינדוקציה:

$$\mathcal{P}_{p_1}\cdots\mathcal{P}_{p_{n-1}} \cong \mathcal{P}_{p_1}\times\cdots\times\mathcal{P}_{p_{n-1}}$$

לכן:

$$\begin{aligned} G &\cong \mathcal{P}_{p_1}\times\cdots\times\mathcal{P}_{p_{n-1}}\times\mathcal{P}_{p_n} \\ &\cong \mathcal{P}_{p_1}\times\cdots\times\mathcal{P}_{p_n} \end{aligned}$$

■