תרגיל 4 אלגברה לינארית למורים תש"ף פתרון בלבד

9 ביוני 2020

1. נעבוד לפי האלגוריתם. נדרג את המטריצה $(A|I)$ ונבדוק אם אחרי דירוג לצורה קנונית מתקבלת המטריצה I בצד שמאל. אם כן המטריצה A הפיכה והמטריצה המתקבלת בצד ימין היא ההפוכית שלה. אם לא אז A אינה הפיכה.

   (א) המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -0.5 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1.5 \\ 0 & 1 & 1 & -0.5 \end{array}\right)$$

   ולכן A הפיכה ומתקיים $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$.

(ב) מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 4R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 - 3R_3]{R_2 \leftarrow R_2 - 4R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

ולכן A הפיכה ומתקיים $A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(ג) מטריצה $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow \frac{1}{8} R_3]{R_2 \leftarrow \frac{1}{4} R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 - 3R_3]{R_2 \leftarrow R_2 - \frac{5}{4} R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{6}{8} & \frac{11}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{32} & -\frac{2}{32} & \frac{13}{32} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 4R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{32} & -\frac{2}{32} & \frac{13}{32} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

ולכן A הפיכה ומתקיים $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{32} & -\frac{2}{32} & \frac{13}{32} \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

(ד) מטריצה $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\leftarrow\frac{1}{4}R_3]{R_1\leftarrow -R_1,\, R_2\leftarrow -R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1\leftarrow R_1-R_3]{R_2\leftarrow R_2+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

ולכן A הפיכה ומתקיים $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

2. כמו שראינו בהרצאה מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. המטריצות האלמנטריות המתאימות לפעולות האלמנטריות הן

$$E_1=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

ונתון כי $E_3E_2E_1A=I$ ולכן

$$A^{-1}=E_3E_2E_1=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

4. ראינו כי עבור $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\5&6&0\end{pmatrix}$ מתקיים כי $A^{-1}=\begin{pmatrix}-24&18&5\\20&-15&-4\\-5&4&1\end{pmatrix}$.

ולכן הפתרון למערכת $Ax=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ הוא

$$x=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24&18&5\\20&-15&-4\\-5&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-6\\2\end{pmatrix}$$

5.

(א) נכון: אם במטריצה יש 2 שורות זהות, נניח R_i,R_j(כאשר $i\neq j$) אזי הפעולה $R_i\leftarrow R_i-R_j$ תגרום לשורה ה i ית להיות שורת אפסים ולכן המטריצה לא הפיכה.

(ב) לא נכון: למשל, מטריצה שכל הכניסות שוות ל 1, למשל $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ לא הפיכה כי יש לה שתי שורות זהות.

(ג) נכון: אם A הפיכה אזי יש לה הופכית A^{-1} ומתקיים $AA^{-1}=I=A^{-1}A$ ואז גם A^{-1} הפיכה (לפי הגדרה) וההופכית שלה היא A. בנוסף $A^2\cdot A^{-1}A^{-1}=I=A^{-1}A^{-1}\cdot A^2$ ולכן גם A^2 הפיכה וההופכית שלה היא $A^{-1}A^{-1}$.