בוחן בדידה

31.7.2016 , כ"ה תמוז תשע"ו

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד מקסמאלי: 110 נקודות

מבנה הבחינה:

- שלוש שאלות.
- שאלה מספר 1 מכילה 3 סעיפים.
- שאלות מספר 2+3 מכילות 2 סעיפים כל אחת.
- רוב הסעיפים הם סעיפי הוכחה (בפרט כמעט ואין מספרים בבוחן).

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. נגדיר יחס R על $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ כך: לכל $(r_1,m_1),(r_2,m_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$

$$(r_1,m_1)\,R\,(r_2,m_2)\iff[(r_1\geq r_2)\wedge(m_1\leq m_2)]$$

(א) (18 נק') הוכיחו כי R יחס סדר.

פתרון: נוכיח כי R רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי־

רפלקסיבי: יהא $(r,m)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ צ"ל כי הוא מתייחס לעצמו. אכן $(r\geq r)\wedge(m\leq m)$ ולכן $(r,m)\,R\,(r,m)$

אנטי סימטרי : נניח $(r_1,m_1)\,R\,(r_2,m_2)$ וגם $(r_2,m_2)\,R\,(r_1,m_1)$

צ"ל $(r_1,m_1)=(r_2,m_2)$. אכן, מההנחות נסיק כי $(r_1\geq r_2)\wedge(m_1\leq m_2)$ וגם$(r_2\geq r_1)\wedge(m_2\leq m_1)$

בסידור אחר של הנתונים־ $(r_1\geq r_2)\wedge(r_2\geq r_1)$ וגם$(m_1\leq m_2)\wedge(m_2\leq m_1)$ ולכן $r_1=r_2$ וגם $m_1=m_2$ ולכן $(r_1,m_1)=(r_2,m_2)$.

טרנזיטיביות: נניח $(r_1,m_1)\,R\,(r_2,m_2)$ וגם $(r_2,m_2)\,R\,(r_3,m_3)$

צ"ל $(r_1,m_1)\,R\,(r_3,m_3)$. אכן, מההנחות נסיק כי $(r_1\geq r_2)\wedge(m_1\leq m_2)$ וגם$(r_2\geq r_3)\wedge(m_2\leq m_3)$

בסידור אחר של הנתונים־ $(r_1\geq r_2)\wedge(r_2\geq r_3)$ וגם$(m_1\leq m_2)\wedge(m_2\leq m_3)$ מטרנזיטיבות "קטן/גדול שווה" נקבל $(r_1\geq r_3)\wedge(m_1\leq m_3)$ מה שאומר $(r_1,m_1)\,R\,(r_3,m_3)$.

(ב) (10 נק') האם R הוא יחס סדר לינארי? אם כן, הוכיחו. אם לא, הפריכו באמצעות דוגמא.

פתרון: לא, למשל $(1,2),(3,4)$ לא מתייחסים זה לזה כי

- מתקיים כי $1\ngeq 3$ ולכן $\neg((1,2)\,R\,(3,4))$.
- מתקיים כי $4\nleq 2$ ולכן $\neg((3,4)\,R\,(1,2))$.

(ג) (12 נק') נגדיר

$$B=\left\{\left(1-\frac{1}{n},m\right):\,n,m\in\mathbb{N}\right\}$$

תת קבוצה של $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$. מצאו $\sup(B),\inf(B)$ (שימו לב שאלו איברים ב $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$), אם הם קיימים. הסבירו את תשובתכם.

פתרון: חסם מלרע של B הוא זוג סדור $(r,k)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ כך ש r גדול מכל $1-\frac{1}{n}$ (לכל $n\in\mathbb{N}$) וגם k קטן מכל m (לכל $m\in\mathbb{N}$). למשל $(5,-2)$.

החסם התחתון של הקבוצה ($\inf(B)$) הוא הכי גדול, ביחס ל R, המקיים תכונה זאת. קל לראות ש $\inf(B)=(1,1)$ הוא המקיים זאת.

חסם מלעיל של B הוא זוג סדור $(r,k)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ כך ש r קטן מכל $1-\frac{1}{n}$ (לכל $n\in\mathbb{N}$) וגם k גדול מכל m (לכל $m\in\mathbb{N}$).

לא קיים חסם מלעיל לקבוצה B (ובפרט לא $\sup(B)$) כיוון שאין מספר שלם k שגדול מכל מספר טבעי m.

2. תהא קבוצה A נגדיר את יחס השיוויון עליה להיות $I=\{(a,a):\,a\in A\}$. עוד נגדיר את הקבוצה L להיות קבוצת כל יחסי השקילות על A. הוכיחו את הבאים:

(א) (17 נק') אזי מתקיים כי

$$I = \bigcap_{R\in L} R$$

פתרון: נשתמש בהכלה דו כיוונית.

($\subseteq$) לכל יחס שקילות $R \in L$ מתקיים כי R רפלקסיבי. בפרט $I \subseteq R$ ולכן $I \subseteq \bigcap_{R\in L} R$.

($\supseteq$) כיוון ש I גם הוא יחס שקילות על A אזי בפרט $I \in L$ ולכן $I \supseteq \bigcap_{R\in L} R$.

ביחד נקבל שיוויון בין הקבוצות.

(ב) (23 נק') כעת נוסיף נתון כי ב־ A קיימים לפחות 3 איברים.
עוד נגדיר $L' = L \setminus \{I\}$. אזי מתקיים כי

$$I = \bigcap_{R\in L'} R$$

פתרון: נשתמש בהכלה דו כיוונית.

($\subseteq$) לכל יחס שקילות $R \in L$ מתקיים כי R רפלקסיבי. בפרט $I \subseteq R$ ולכן $I \subseteq \bigcap_{R\in L} R$.

($\supseteq$) נסמן $a_1, a_2, a_3 \in A$ איברים שונים (קיימים לפי הנתון). נגדיר את יחסי השקילות הבאים

$$\begin{aligned} R_1 &= I \cup \{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\} \\ R_2 &= I \cup \{(a_2, a_3), (a_3, a_2)\} \end{aligned}$$

אלו יחסי השקילות (בפרט $R_1, R_2 \in L'$). ב R_1 האיברים השונים היחידים המתייחסים זה לזה הם a_1, a_2 וב R_2אלו a_2, a_3.

כעת, כיוון שאלו איברים שונים נקבל כי $R_1 \cap R_2 = I$ ולכן

$$I = R_1 \cap R_2 \supseteq \bigcap_{R\in L'} R$$

ביחד נקבל שיוויון בין הקבוצות.

3. תהא U קבוצה אוניברסלית. יהיה $m \in \mathbb{N}$ טבעי נתון ויהיו $A_1, \ldots, A_m \subseteq U$ תתי קבוצות. נגדיר

$$\mathbb{X}_m = \{X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_m \mid \forall 1 \le i \le m : (X_i = A_i) \vee (X_i = U \setminus A_i)\}$$

קבוצה $B \in \mathbb{X}_m$ נקראת קבוצה פונדמנטלית מסדר m (הערה: הקבוצה $\mathbb{X}_m$ מסומנת ב X מודגשת לשם נוחות השאלה בלבד).

(א) (10 נק') תהיינה $B_1 \neq B_2 \in \mathbb{X}_m$ שתי קבוצות פונדמנטליות שונות מסדר m.
הוכיחו כי

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

פתרון: נסמן

$$B_1 = X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_m, \;\; B_2 = Y_1 \cap Y_2 \cap \cdots \cap Y_m$$

אם לכל $1 \leq i \leq m$ מתקיים כי $X_i = Y_i$ אזי $B_1 = B_2$ ונקבל סתירה לנתון.
לכן בהכרח קיים i כך ש $X_i \neq Y_i$ ולכן

$$\{X_i, Y_i\} = \{A_i, U \setminus A_i\}$$

כלומר X_i שווה A_i ו Y_iשווה $U \setminus A_i$. או להיפך. ולכן $X_i \cap Y_i = \emptyset$ ולכן

$$B_1 \cap B_2 \subseteq X_i \cap Y_i = \emptyset$$

הקבוצה היחידה המוכלת בקבוצה ריקה זה הקבוצה הריקה בעצמה. אכן קיבלנו $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

(ב) (20 נק') הוכיחו כי

$$U = \bigcup_{B \in \mathbb{X}_m} B$$

לכל $m \in \mathbb{N}$ טבעי [הדרכה אפשרית- הוכיחו באינדוקציה]
פתרון: בסיס האינדוקציה $m = 1$. תהא A_1 קבוצה בודדת ונגדיר $\mathbb{X}_1$ כמו בשאלה. נקבל כי

$$\mathbb{X}_1 = \{A_1, U \setminus A_1\}$$

ומתקיים כי

$$\bigcup_{B \in \mathbb{X}_m} B = A_1 \cup (U \setminus A_1) = U$$

. כעת נניח שהטענה נכונה עבור m טבעי מסוים ונוכיח את הטענה עבור $m+1$.
צ"ל עבור $m+1$ קבוצות $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$ והגדרת $\mathbb{X}_{m+1}$ בשאלה מתקיים כי

$$U = \bigcup_{B \in \mathbb{X}_{m+1}} B$$

נחלק את $\mathbb{X}_{m+1}$ לשתי קבוצות כך

$$\mathbb{Y}_1 \;\; = \;\; \{X_1 \cap \cdots \cap X_m \cap X_{m+1} \in \mathbb{X}_{m+1} \;:\; X_{m+1} = A_{m+1}\} = \{B \cap A_{m+1} \in \mathbb{X}_{m+1} \;:\; B \in \mathbb{X}_m\}$$

$$\mathbb{Y}_2 \;\; = \;\; \{X_1 \cap \cdots \cap X_m \cap X_{m+1} \in \mathbb{X}_{m+1} \;:\; X_{m+1} = U \setminus A_{m+1}\} = \{B \cap (U \setminus A_{m+1}) \in \mathbb{X}_{m+1} \;:\; B \in \mathbb{X}_m\}$$

כלומר $\mathbb{Y}_1$ שווה לכל החיתוכים כך שהקבוצה האחרונה שנחתכת היא A_{m+1} ו $\mathbb{Y}_2$שווה לכל החיתוכים כך שהקבוצה האחרונה שנחתכת היא $U \setminus A_{m+1}$.
קל לראות כי

$$\mathbb{X}_{m+1} = \mathbb{Y}_1 \cup \mathbb{Y}_2,\ \ \mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2 = \emptyset$$

ולכן: לכל $B \in \mathbb{X}_m$מתקיים

$$B \cap A_{m+1} \in \mathbb{Y}_1 \,, B \cap (U \setminus A_{m+1}) \in \mathbb{Y}_2$$

ואלו כל הקבוצות ב $\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2$. כעת

$$\begin{aligned}
\bigcup_{B \in \mathbb{X}_{m+1}} B \quad &= \quad \left(\bigcup_{B \in \mathbb{Y}_1} B\right) \bigcup \left(\bigcup_{B \in \mathbb{Y}_2} B\right) = \\
&\overset{(1)}{=} \quad \left(\bigcup_{B \in \mathbb{X}_m} [B \cap A_{m+1}]\right) \bigcup \left(\bigcup_{B \in \mathbb{X}_m} [B \cap (U \setminus A_{m+1})]\right) \\
&\overset{(2)}{=} \quad \bigcup_{B \in \mathbb{X}_m} \Big([B \cap A_{m+1}] \bigcup [B \cap (U \setminus A_{m+1})]\Big) \\
&\overset{(3)}{=} \quad \bigcup_{B \in \mathbb{X}_m} (B) \\
&\overset{(4)}{=} \quad U
\end{aligned}$$

כאשר הנימוקים הם: (1) זה הגדרה, (2)כיוון שהאיחוד הוא על מספר סופי של איברים, נוכל לבחור את סדר האיחוד בין הקבוצות (זכרו: איחוד קבוצות הוא קיבוצי). נבחר לאחד את הקבוצות בזוגות כאשר כל זוג הוא מהצורה $[B \cap A_{m+1}] \bigcup [B \cap (U \setminus A_{m+1})]$ עבור $B \in \mathbb{X}_m$ (כלומר קבוצה אחת מ $\mathbb{Y}_1$ והשניה $\mathbb{Y}_2$) , (3) פילוג פשוט (חיתוך קבוצה עם קבוצה A_{m+1} איחוד חיתוך הקבוצה עם המשלים של A_{m+1} יתן פשוט את הקבוצה), (4) זה הנחת האינדוקציה