בחינה סופית בחשבון אינפיניטסימלי 3 — 88-230-05

מועד ב' תשע"ט

מרצה:ד"ר שמעון ברוקס
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: מחשבון

ענו על 4 מתוך 5 השאלות

1. (תנאי ליפשיץ) תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, וקבוע $M>0$ כך שלכל $x,y\in\mathbb{R}^n$ מתקיים

$$|f(x)-f(y)|\le M\cdot\|x-y\|$$

הוכח/הפרך:

(א) f רציפה בכל $\mathbb{R}^n$.

(ב) f גזירה בכל $\mathbb{R}^n$.

(ג) אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות על כדור היחידה הסגור $\overline{B}=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|\le 1\}$, אזי f בהכרח מקיימת את התנאי הנ"ל עבור איזשהו קבוע $M>0$, בתוך התחום $\overline{B}$.

2. תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות. הוכח שקיימת פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(x,y)=g(x+y)$, אם ורק אם לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ מתקיים

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$$

(רמז: ניתן להעזר בשינוי קואורדינטות $u=x+y$, $v=x-y$)

3. תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות, ונגדיר

$$\Delta f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=tr[H_f(x,y)]$$

כאשר $H_f(x,y)$ היא מטריצת הסיאן של f בנקודה (x,y).
הוכח שאם $\Delta f(x,y)>0$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, אז אין ל־f אף נקודת מקסימום מקומי.
(פונקציה כזו נקראת "תת־הרמונית".)

4. מצא מקסימום ומינימום מוחלטים של הפונקציה

$$f(x,y)=xy$$

בתחום האליפסה

$$2x^2+\frac{1}{2}y^2\le 1$$

5. חשבו את האינטגרל הכפול

$$\iint_\Omega xe^y\,dxdy$$

כאשר Ω הוא התחום המוגבל ע"י ציר ה־x (הישר $y=0$), הישר $x=2$, והעקומה $y=\ln(x)$.

בהצלחה רבה!