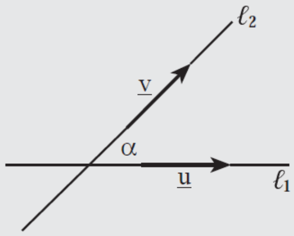
תרגול אחרון בויקטורים

זווית בין ישרים ומישורים

הזווית בין שני ישרים – הזווית בין שני ישרים ℓ_1 ו-ℓ_2 (גם אם אינם נחתכים) מסומנת ע"י $\measuredangle(\ell_1,\ell_2)$ ומוגדרת כזווית שבין שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ (השונים מווקטור האפס) כך שאחד על ℓ_1 והשני על ℓ_2 בהתאם למקרים הבאים:



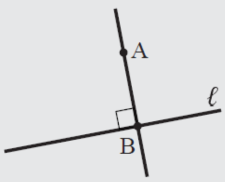
א) אם הזווית בין $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ היא חדה אז זאת הזווית שבין הישרים ℓ_1 ו-ℓ_2.

ב) אם הזווית בין $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ היא קהה אז הזווית המשלימה אותה ל-180^o היא הזווית שבין הישרים ℓ_1 ו-ℓ_2.

דוגמא ג':

נתון הישר $\ell: x = (-1,3,0)+t(2,-3,1)$. מצא הצגה פרמטרית של הישר שניצב לישר ℓ, חותך את הישר ℓ ועובר בנקודה $A(4,2,1)$.

פתרון:



נניח שהישר המבוקש חותך את הישר ℓ בנקודה $B(x,y,z)$.
הנקודה B היא על הישר ℓ ולכן ישנו t עבורו:
$(x,y,z) = (-1,3,0)+t(2,-3,1)$, כלומר $B = (-1+2t,3-3t,t)$.
נביע את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ באמצעות t:
$\overrightarrow{AB} = (-1+2t-4,3-3t-2,t-1) = (2t-5,1-3t,t-1)$. עפ"י הנתון, הווקטור $\overrightarrow{AB}$ ניצב לישר ℓ כלומר הוא ניצב לווקטור כיוון שלו שהוא $(2,-3,1)$. לכן $(2t-5,1-3t,t-1)(2,-3,1) = 0$, כלומר $4t-10-3+9t+t-1 = 0$, או $14t = 14$, כלומר $t = 1$. מכאן ששיעורי הנקודה B הם: $x = -1+2\cdot1 = 1$, $y = 3-3\cdot1 = 0$, $z = 1$. כלומר $B = (1,0,1)$. הצגה פרמטרית של הישר המבוקש עפ"י הנקודות A ו-B היא $\underline{x} = (4,2,1)+s(-3,-2,0)$.

ישר הניצב למישור הנתון ע"י הצגה פרמטרית

נביא דוגמאות שבהן הישר ניצב למישור שנתון ע"י הצגה פרמטרית.

דוגמא א':

הוכח שהישר $\ell: \underline{x} = (-1,0,2)+r(2,-1,2)$
ניצב למישור $\pi: \underline{x} = (2,1,0)+t(-1,4,3)+s(5,-2,-6)$.

פתרון:

עפ"י משפט (1) מספיק להוכיח שהווקטור $(2,-1,2)$, שהוא וקטור כיוון של הישר ℓ ניצב לווקטורים $(-1,4,3)$ ו-$(5,-2,-6)$, שהם וקטורים הפורשים את המישור π.
ואכן $(2,-1,2)\cdot(-1,4,3) = -2-4+6 = 0$, $(2,-1,2)\cdot(5,-2,-6) = 10+2-12 = 0$.
לכן הישר ℓ ניצב למישור π.

דוגמא ב':

מצא הצגה פרמטרית של הישר העובר בנקודה $(3,5,1)$ והניצב למישור $\underline{x} = (1,3,0)+t(3,2,2)+s(-2,8,1)$.

דוגמא ד':

הוכח שהישר $\ell: \underline{x} = (1,-2,0)+t(-4,6,-2)$ ניצב למישור $\pi: 2x-3y+z-5 = 0$.

דוגמא ה':

מצא הצגה פרמטרית של הישר העובר בנקודה $(5,-1,0)$ והניצב למישור $3x-7y+z-2 = 0$.

דוגמא ו':

מצא את משוואת המישור הניצב לווקטור $(2,-1,4)$ והעובר דרך הנקודה $A = (3,5,-1)$.

דוגמא ז':

נתונים הישרים $\ell_1: \underline{x} = t(1,2,-3)$, $\ell_2: \underline{x} = (0,1,-2)+s(4,1,2)$

א. הראה שהישרים ℓ_1 ו-ℓ_2 ניצבים זה לזה.

ב. מצא את משוואת המישור הניצב לישר ℓ_1 והמכיל את הישר ℓ_2

פתרון:

א. נבדוק מכפלה סקלרית של וקטורי כיוון של הישרים ℓ_1 ו-ℓ_2:

$(1,2,-3)\cdot(4,1,2) = 1\cdot4+2\cdot1-3\cdot2 = 4+2-6 = 0$ לכן הישרים ניצבים זה לזה.

ב. אם המישור ניצב לישר ℓ_1 אז משוואת המישור היא מהצורה $x+2y-3z+d = 0$.
אם הישר ℓ_2 מוכל במישור אז כל נקודה שלו נמצאת במישור. עבור $s = 0$ נקבל שהנקודה $(0,1,-2)$ נמצאת על הישר ℓ_2 ולכן גם במישור. כמו בדוגמא הקודמת, נציב את שיעורי הנקודה $(0,1,-2)$ ונקבל $1\cdot0+2\cdot1-3\cdot(-2)+d = 0$. כלומר $d = -8$ ולכן משוואת המישור היא $x+2y-3z-8 = 0$.

אם $\underline{u}$ הוא וקטור הניצב למישור π ו-$\underline{v}$ הוא וקטור כיוון של ישר ℓ אז הזווית α שבין הישר ℓ למישור π מקיימת:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{|\underline{u}\cdot\underline{v}|}{|\underline{u}||\underline{v}|}}$$

בצורה אחרת נוכל לרשום:

הזווית α שבין הישר $x = \underline{r}+t\underline{v}$ למישור $ax+by+cz+d = 0$ כך ש-$\underline{u} = (a,b,c)$ מקיימת:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{|\underline{u}\cdot\underline{v}|}{|\underline{u}||\underline{v}|}}$$

דוגמא א':

חשב את הזווית שבין הישר $\ell: \underline{x} = (2,0,3)+t(-2,1,5)$ והמישור $\pi: 3x-7y-z-8 = 0$.

דוגמא ב׳:

מצא את הזווית שבין הישר $\ell: \underline{x} = (-1,2,3)+r(2,0,1)$
והמישור $\pi: \underline{x} = (1,-1,0)+t(2,1,-3)+s(3,-1,-7)$.

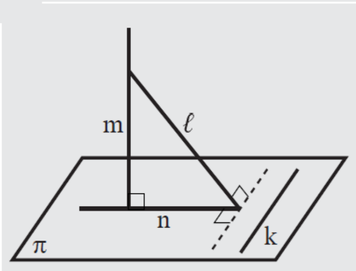
פתרון:

אם $\underline{u} = (a,b,c)$ הוא וקטור הניצב למישור π אז הוא ניצב לווקטורים $(2,1,-3)$ ו-$(3,-1,-7)$ הקובעים את המישור π. לכן צריך להתקיים $(2,1,-3)\cdot(a,b,c) = 0$ וגם $(3,-1,-7)\cdot(a,b,c) = 0$. הפתרון המתקבל ע״י פתרון שתי המשוואות הוא $\underline{u} = (2,-1,1)$. נעבור לחישוב הזווית α שבין הישר והמישור:

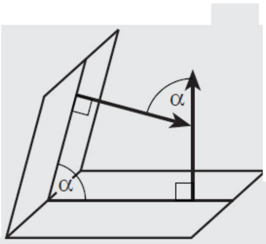
$$\sin\alpha = \frac{|(2,-1,1)\cdot(2,0,1)|}{\sqrt{4+1+1}\,\sqrt{4+1}} = \frac{4+1}{\sqrt{6}\,\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

משפט (7):

ישר במישור ניצב למשופע למישור אם ורק אם הוא ניצב להיטל המשופע על המישור.



חישוב הזווית שבין שני מישורים



הזווית בין שני מישורים שווה לזווית שבין הניצבים למישורים.

ההגדרה של מרחק נקודה מישר

בסעיף זה ובסעיף הבא נדון במרחק שבין נקודה לישר. נזכיר תחילה:

המרחק בין נקודה לישר זהו אורכו של האנך מהנקודה לישר.

נדגיש מייד שיש הבדל במציאת המרחק אם מדובר על **ישר במישור** או על **ישר במרחב**. הסיבה היא, שבמישור יש לישר משוואה כללית מהצורה $ax+by+c = 0$ ואילו במרחב יש לו הצגה פרמטרית בלבד.

לסיכום:

מרחק הנקודה (x_1,y_1) מהישר $ax+by+c = 0$ הוא: $\boxed{\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

המרחק $|\overrightarrow{X_0X_1}|$ שהוא מרחק הנקודה X_1 מהישר $\underline{x} = \underline{a}+t\underline{u}$ הוא:

$$\boxed{|\overrightarrow{X_0X_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{X_1X_2}|^2 - \frac{|\underline{u}\cdot\overrightarrow{X_1X_2}|^2}{|\underline{u}|^2}}}$$

כאשר X_2 היא נקודה כלשהי על הישר.

דוגמא א':

חשב את מרחק הנקודה $X_1 = (5,-4,3)$ מהישר שהצגה פרמטרית שלו היא $\ell:\ \underline{x} = (1,-1,4)+t(-1,2,0)$.

פתרון:

דרך א' – נבחר נקודה X_2 על הישר, למשל עבור $t = 0$ נקבל את הנקודה $X_2 = (1,-1,4)$. וקטור כיוון של הישר הוא $\underline{u} = (-1,2,0)$.

נחשב את הווקטור $\overrightarrow{X_1X_2}$: $\overrightarrow{X_1X_2} = (1-5,-1+4,4-3) = (-4,3,1)$.

מכאן שאורך הווקטור $\overrightarrow{X_1X_2}$ הוא: $|\overrightarrow{X_1X_2}| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$.

נחשב את המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\overrightarrow{X_1X_2}$: $\underline{u}\cdot\overrightarrow{X_1X_2} = (-1,2,0)\cdot(-4,3,1) = 4+6+0 = 10$,

כמו כן $|\underline{u}| = \sqrt{1^2+2^2+0^2} = \sqrt{5}$.

נציב בנוסחה למרחק ונקבל: $\sqrt{|\overrightarrow{X_1X_2}|^2 - \frac{|\underline{u}\cdot\overrightarrow{X_1X_2}|^2}{|\underline{u}|^2}} = \sqrt{26-\frac{10^2}{5}} = \sqrt{26-20} = \sqrt{6}$.

דרך ב' – נקודה אופיינית על הישר ℓ היא $X_2 = (1-t,-1+2t,4)$. נביע את אורך $|\overrightarrow{X_1X_2}|^2$ באמצעות t:

$$|\overrightarrow{X_1X_2}|^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 = (1-t-5)^2+(-1+2t+4)^2+(4-3)^2 =$$
$$= (-t-4)^2+(2t+3)^2+1^2 = 5t^2+20t+26$$

מרחק הנקודה X_1 מהישר ℓ הוא **המרחק המינימלי** מבין כל המרחקים של X_1 מנקודה כלשהי על הישר. ניעזר **בחשבון הדיפרנציאלי** ונמצא **מינימום לפונקציה** $f(t) = 5t^2+20t+26$. הנגזרת היא $f'(t) = 10t+20$ ואם נשווה לאפס נקבל ש-$t = -2$. קל לראות שזהו ערך מינימום. המרחק של הנקודה X_1 מהישר ℓ הוא $\sqrt{f(t)}$ עבור $t = -2$, כלומר: $\sqrt{f(-2)} = \sqrt{5\cdot(-2)^2+20\cdot(-2)+26} = \sqrt{20-40+26} = \sqrt{6}$.

דרך ג' – תהי הנקודה X_0 **היטל הנקודה** X_1 על הישר ℓ. הנקודה X_0 על הישר ℓ ולכן שיעוריה הם, כמו קודם, $X_0 = (1-t,-1+2t,4)$ עבור t מסויים.

הווקטור $\overrightarrow{X_1X_0}$ הוא: $\overrightarrow{X_1X_0} = (1-t-5,-1+2t+4,4-3) = (-t-4,2t+3,1)$.

הווקטורים $\overrightarrow{X_1X_0}$ ו-$\underline{u}$ ניצבים זה לזה ולכן:

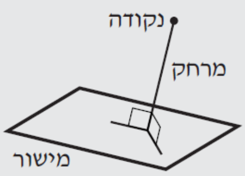
$$\underline{u}\cdot\overrightarrow{X_1X_0} = (-1,2,0)\cdot(-t-4,2t+3,1) = t+4+4t+6 = 5t+10 = 0$$

ומכאן $t = -2$. נחשב את אורך $\overrightarrow{X_1X_0}$ ע"י שנציב $t = -2$:

$$|\overrightarrow{X_1X_0}| = \sqrt{(2-4)^2+(-4+3)^2+1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}.$$

נזכיר:

מרחק נקודה ממישור זהו אורכו של האנך מהנקודה למישור.



כלומר, כדי לחשב את המרחק בין נקודה למישור צריך לחשב את אורכו של האנך מהנקודה למישור.

לסיכום:

מרחק הנקודה (x_1, y_1, z_1) מהמישור $ax+by+cz+d=0$ הוא:

$$\boxed{\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

דוגמא א':

נתונים הנקודה $A=(2,3,2)$ והמישור $\pi: 4x-7y-4z-6=0$.

א. הראה שהנקודה A איננה נמצאת במישור π.

ב. חשב את מרחקה של הנקודה מהמישור.

פתרון:

א. אם נציב את שיעורי הנקודה A במשוואת המישור נקבל $4\cdot2-7\cdot3-4\cdot2-6=-27$. אם הנקודה היתה על המישור התוצאה היתה צריכה להיות שווה ל-0, לכן הנקודה איננה על המישור.

ב. נחשב את המרחק עפ"י הנוסחה:

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|4\cdot2-7\cdot3-4\cdot2-6|}{\sqrt{16+49+16}}=\frac{|-27|}{\sqrt{81}}=\frac{27}{9}=3.$$

דוגמא ב':

חשב את מרחק הנקודה $A=(0,1,3)$ מהמישור שהצגה פרמטרית שלו היא: $\underline{x}=(0,1,0)+t(2,1,0)+s(2,0,-1)$.

המרחק בין ישרים מקבילים במישור

הנוסחה לחישוב המרחק בין שני ישרים מקבילים **במישור** ידועה מהגיאומטריה האנליטית (ראה עמ' 50). התוצאה המתקבלת:

המרחק בין הישרים המקבילים $\ell_1: ax+by+c_1=0$ ו-$\ell_2: ax+by+c_2=0$ הוא:

$$\boxed{\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

המרחק בין ישרים מקבילים במרחב

גם חישוב המרחק בין שני ישרים מקבילים במרחב דומה לחישוב מרחק בין נקודה וישר **במרחב**. נוכל **לסכם:**

המרחק במרחב בין הישרים המקבילים $\underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$ ו-$\underline{x}=\underline{b}+s\underline{u}$, כאשר X_1 ו-X_2 הן בהתאמה נקודות כלשהן על הישרים, הוא:

$$\boxed{\sqrt{|\overrightarrow{X_1X_2}|^2-\frac{|\underline{u}\cdot\overrightarrow{X_1X_2}|^2}{|\underline{u}|^2}}}$$

חישוב המרחק בין ישרים מקבילים במרחב

המרחק במרחב בין הישרים המקבילים $\underline{x} = \underline{a}+t\underline{u}$ ו- $\underline{x} = \underline{b}+s\underline{u}$, כאשר X_1 ו- X_2 הן בהתאמה נקודות כלשהן על הישרים, הוא: $\boxed{\sqrt{|\overrightarrow{X_1X_2}|^2 - \frac{|\underline{u}\cdot\overrightarrow{X_1X_2}|^2}{|\underline{u}|^2}}}$

חשב את המרחק בין הישרים המקבילים הבאים:

1) $\underline{x} = t(0,1,0)$, $\underline{x} = (-3,2,4)+s(0,1,0)$.

2) $\underline{x} = (1,-2,9)+t(0,1,-4)$, $\underline{x} = (-7,4,2)+s(0,1,-4)$.

3) $\underline{x} = (1,3,-4)+t(2,-1,5)$, $\underline{x} = (8,2,5)+s(2,-1,5)$.

נוכל **לסכם:**

המרחק בין הישר $\underline{x} = \underline{r}+t\underline{u}$ המקביל למישור $ax+by+cz+d = 0$, כאשר (x_1, y_1, z_1) היא נקודה כלשהי על הישר, הוא: $\boxed{\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$

דוגמא:

נתונים הישר $\ell: \underline{x} = (1,-1,1)+t(3,2,0)$ והמישור $\pi: 2x-3y+z+8 = 0$.

א. הראה שהישר מקביל למישור. ב. חשב את המרחק ביניהם.

ב. נבחר על הישר את הנקודה $(1,-1,1)$. מרחק הנקודה מהמישור $2x-3y+z+8 = 0$ הוא:

$$\frac{|2\cdot1-3\cdot(-1)+1\cdot1+8|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}.$$

הערה: אם המישור נתון בהצגה פרמטרית אפשר לפתור בדומה לדוגמא ב׳ בעמ׳ 551.