נכתב על ידי יהונתן רגב

<u>משפטי התכנסות טורים</u>

למה

אם הטורים $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים, אזי - $\sum(a_n+b_n)=\sum a_n+\sum b_n$, ובפרט מתכנס.

הוכחה

$$\sum(a_n+b_n)=(a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)$$

$$\sum(a_n+b_n)=(a_1+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_n)$$

$$\sum(a_n+b_n)\to_{n\to\infty}\sum a_n+\sum b_n$$

■

מסקנה

אם $\sum(a_n-b_n)$ מתכנס, אז הטורים $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

הוכחה

נניח כי $\sum b_n$ מתכנס. מהלמה הנ"ל:

$$\sum a_n=\sum\big((a_n-b_n)+b_n\big)=\sum(a_n-b_n)+\sum b_n.$$

הערה

אם $c\neq 0$, אז: $\sum c\cdot a_n=c\cdot\sum a_n$, אם אחד מהסכומים קיים.

הוכחה

$\sum c\cdot a_n=(c\cdot a_1+\cdots+c\cdot a_n)=c\cdot(a_1+\cdots+a_n)\to_{n\to\infty}c\cdot\sum a_n$, לכן, אם $\sum a_n$ קיים, אז $\sum c\cdot a_n=c\cdot\sum a_n$.

מצד שני, אם $\sum c\cdot a_n$ קיים, אז עפ"י מה שהוכחנו מתקיים:

$$\sum a_n=\sum\left(\frac{1}{c}\right)\cdot c\cdot a_n=\frac{1}{c}\cdot\sum c\cdot a_n$$

נכפול ב $-c$, ונקבל:

$$c\cdot\sum a_n=\sum c\cdot a_n$$

הערה

באופן דומה, אם $\sum a_n = \pm\infty$, $c > 0$, אז $\sum c \cdot a_n = \pm\infty$, ואם $c < 0$, אז $\sum c \cdot a_n = \mp\infty$.

טורים חיוביים

הגדרה

טור חיובי $\sum a_n$ הינו טור שכל איבריו a_n חיוביים.

הערה

אם כל $0 \leq a_n$ וקיימים אינסוף $0 < a_n$, ניתן לקחת את a_{m_n} להיות האיבר החיובי ה n – י בסדרה, ויתקיים $\sum a_n = \sum a_{m_n}$, כשלפחות אחד מהם קיים, והטור a_n חיובי. (*תרגיל).

לכן, משפטים רבים על טורים חיוביים ניתן לנסח עבור טורים "אי שליליים" כנ"ל.

הערה

לטור חיובי $\sum a_n$, סידרת הסכומים החלקיים $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ עולה, ולכן תמיד קיים $\sum a_n := lim\, s_n$ במובן הרחב (ממשי או ∞).

מבחן ההשוואה

אם $0 < a_n \leq b_n$ לכל n, אזי $\sum a_n \leq \sum b_n$.

בפרט:

1. אם $\sum b_n < \infty$, אז $\sum a_n < \infty$.
2. אם $\sum a_n = \infty$, אז $\sum b_n = \infty$.

הוכחה

לכל n, $\sum a_n \leftarrow a_1 + \cdots + a_n \leq b_1 + \cdots + b_n \rightarrow \sum b_n$, לכן: $\sum a_n \leq \sum b_n$. ■

(השתמשנו בתכונה: אם $t_n \leq s_n$ לכל n, והסדרות מתכנסות במובן הרחב, אז $lim\, t_n \leq lim\, s_n$).

הערה

1. + 2. הנ"ל נכונים גם כאשר $0 < a_n \leq b_n$ פרט למספר סופי של n-ים, אבל לא בהכרח $\sum a_n \leq \sum b_n$.

דוגמה

נתבונן בטור: $\sum \left(\frac{1}{n^2}\right) < \infty$.

לכל $n \geq 2$, מתקיים: $0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n\cdot(n-1)}$. הטור $\sum(\frac{1}{n\cdot(n-1)})$ מתכנס (טור טלסקופי), ולכן ממבחן ההשוואה $\sum\left(\frac{1}{n^2}\right) < \infty$.

יתר על כן: $1 < \sum_{n=1}\frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}\frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}(\frac{1}{n\cdot(n-1)}) = 2$.

תרגיל: אם $a_n < b_n$ לכל n ושני הטורים מתכנסים, אז $\sum a_n < \sum b_n$. יתר על כן, מספיק ש - $a_n \leq b_n$ ויש לפחות n אחד כך ש - $a_n < b_n$.

הערה

בקורס אינפי 2 נראה שמתקיים: $\sum\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$.

למה

אם קיימים קבועים $0 < c, c'$ כך שלבסוף $c < \frac{a_n}{b_n} < c'$, והטורים חיוביים, אז הטורים $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

הוכחה

$a_n < c' \cdot b_n$. אם $\sum b_n < \infty$, אז $\sum c' \cdot b_n = c' \cdot \sum b_n < \infty$, ולכן ממבחן ההשוואה מתקיים: $\sum a_n < \infty$.

באופן דומה: $c \cdot b_n < a_n$, ולכן אם $\sum a_n < \infty$, אז $\sum c \cdot b_n = c \cdot \sum b_n$, ולכן מתקיים: $\sum b_n < \infty$. ∎

מבחן ההשוואה הגבולי

עבור טורים חיוביים, אם הגבול $\frac{a_n}{b_n} \to c$ קיים וכן $0 < c < \infty$, אזי הטורים $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

הוכחה

ניקח $0 < \epsilon$ כך ש - $0 < c - \epsilon$ (למשל $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot c$).

אזי, קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים: $0 < c - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \epsilon$. ומהלמה הנ"ל הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד. ∎

דוגמה

נתבונן בטור: $\sum(\frac{n}{n^2+1})$.

$$\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n^2+1} \to 0 < 1 < \infty$$

כיוון ש - $\sum\left(\frac{1}{n}\right) = \infty$, עפ״י מבחן ההשוואה הגבולי גם הנ״ל מתבדר.

הערה

נניח $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ והטורים חיוביים, אז: אם $\sum b_n < \infty$, אז $\sum a_n < \infty$.

נניח $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$ והטורים חיוביים, אז: אם $\sum a_n < \infty$, אז $\sum b_n < \infty$.

הוכחה

דומה להוכחה הקודמת.

1. $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, ובפרט: $\frac{a_n}{b_n} < 1$ לבסוף, ולכן $a_n < b_n$ לבסוף. עפ״י מבחן ההשוואה נקבל את הדרוש.
2. אם $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$, $1 < \frac{a_n}{b_n}$ לבסוף, ולכן $b_n < a_n$ לבסוף. עפ״י מבחן ההשוואה נקבל את הדרוש. ■