מבחן לדוגמה־פתרון

25 ביוני 2018

חלק ב'
שאלה 3
א) מצאו את כל המספרים המרוכבים z המקיימים את המשוואה הבאה:

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1$$

ב) מצאו לאילו ערכי k למערכת הבאה:

$$\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ x-y-2z=0 \\ (k^2-5)x+y=k+2 \end{cases}$$

יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון.
פתרון:
א) קודם כל נשים לב שתחום ההגדרה של המשוואה הוא $|z+1|\neq 0$ כלומר $(x+1)^2+y^2\neq 0$, כלומר כאשר $z\neq -1$
מעשה מכנה משותף ונקבל:

$$|z-1| = |z+1|$$

$$|x-1+iy| = |x+1+iy|$$

$$(x-1)^2+y^2 = (x+1)^2+y^2$$

נפתח סוגריים ונקבל:

$$4x = 0$$

מה שגורר שכל מספר מרוכב מדומה, כלומר מספר מהצורה $z=iy$ פותר את המשוואה.
ב) נדרג את המטריצה ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2k^2 & 2k+2 \end{pmatrix}$$

ולכן אם $k=0$ אין פתרון למערכת. ביתר המקרים יש פתרון יחיד.

שאלה 4

נתונה מטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

א) מצאו בסיס ומימד לתתי מרחבים $C(A), N(A)$.

ב) השלימו את הבסיס שמצאתם ל-$R(A)$ לבסיס ל-$\mathbb{R}^4$.

ג) הסבירו לפי א': האם A הפיכה?

ד) מצאו מיהו המרחב הניצב ל-$N(A)\bigcap C(A)$?

פתרון:

א) נדרג ונקבל :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $C(A) = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

קל לראות הפתרון למערכת ההומוגנית הוא

$y=-z$

$x=-t+z$

ולכן $N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -t+z \\ -z \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

ב) ידוע ש-$N(A)$ ניצב ל-$R(A)$ אפשר להוסיף וקטורים מ-$N(A)$ ל-$R(A)$.

$$\mathbb{R}^4 = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ג) לא, כי למערכת הומוגנית יש פתרון שונה מאפס.

ד)

נבנה מערכת משוואות:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 2 & c \\ 1 & 0 & -1 & 0 & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d+a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 3 & c+b \\ 0 & 0 & 0 & 2 & d+a+b \end{pmatrix}$$

קל לראות שלמערכת יש פתרון לכל a,b,c,d ולכן $C(A)\bigcap N(A)=\{0\}$ ולכן המרחב הניצב למרחב האפס הוא כל מהרחב $\mathbb{R}^4$, כי כל וקטור ניצב לוקטור האפס.

שאלה 5

א) לאילו ערכים של x המטריצה הבאה תהיה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -1 & x+2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ב) תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה. אזי $A+B$ היא הפיכה אם ורק אם $I+A^{-1}B$ הפיכה.

פתרון:

א) כאן קל מאוד לחשב את הדטרמיננטה של המטריצה ולבדוק עבור איזה x היא תהיה שונה מאפס:

$|A|=(x-1)(x+2-3)-3(-1+3)-3(1-(x+2))=x^2+x-2\neq 0$ אם $x\neq -2,1$

ב) כאן צריך להוכיח את שני הכיוונים:

כיוון ראשון: נניח ש-$A+B$ הפיכה.

צ"ל: $I+A^{-1}B$ הפיכה.

הוכחה: קיימת C הפיכה גם כך ש-$(A+B)C=I$

נפתח סוגריים ונקבל: $AC+BC=I$

נכפיל את שני האגפים ב-A^{-1} ונקבל: $C+A^{-1}BC=A^{-1}$

עכשיו נכפול את שני האגפים ב-C^{-1} ונקבל: $I+A^{-1}B=A^{-1}C^{-1}=(CA)^{-1}$

ולכן קיבלנו ש-$I+A^{-1}B$ הפיכה כי A,C הפיכות.

כיוון שני: נניח ש-$I+A^{-1}B$ הפיכה.

צ"ל: $A+B$ הפיכה.

הוכחה: קיימת C הפיכה כל ש-$(I+A^{-1}B)C=I$

ולכן $C+A^{-1}BC=I$. נכפול את שני האגפים ב-C^{-1} ונקבל: $I+A^{-1}B=C^{-1}$

נכפיל את שני האגפים ב-A ונקבל: $A+B=AC^{-1}$ ולכן היא הפיכה כי A,C הפיכות.

שאלה 6

א) לא רלוונטי

ב) האם קיימת מטריצה A ריבועית כך ש-$R(A)=N(A)$? אם כן, תנו דוגמה למטריצה כזו, אם לא, הסבירו לה לא קיימת.

פתרון:

לא קיימת מטריצה כזו כי מרחב שורה ניצב למרחב האפס ולכן החיתוך בין שני המרחבים הוא מרחב האפס, ואין מטריצה כזו שבה מרחב השורה ומרחב האפס הם אפס.

ג) עבור מטריצה ריבועית A, תנו דוגמה מתי:

1) אוסף הפתרונות של המערכת $Ax = 0, A^t x = 0$ זהים.

2) אוסף הפתרונות של המערכות ב־1 שונים לחלוטין.

פתרון:

1) זה נכון עבור כל מטריצה סימטרית

2) נבחר למשל:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אזי $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

אוסף הפתרונות של $Ax = 0$ הוא $span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

אוסף הפתרונות של $A^T x = 0$ הוא $span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

קל להראות שהחיתוך של המרחבים האלה הוא מרחב האפס ולכן הם שונים.