מיון מד"ח לינארית מסדר $\mathbb{I}$

תרגיל:

$$x^2u_{xx} - 2yxu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_y = xy^2$$

א) מיין.

ב) הבא לצורה קנונית.

פתרון:

א) המקדמים הינם:

$$a = x^2, 2b = -2xy, c = y^2$$

לכן:

$$\Delta = b^2 - ac = (-xy)^2 - x^2y^2 = 0$$

לכן המד"ח מסוג פרבולי.

ב) נפתור:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy \pm 0}{x^2} = -\frac{xy}{x^2}$$

נניח ש - $x \neq 0$ ונקבל:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}}$$

$$x\,dy = -y\,dx$$

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \ln y = -\ln x + \tilde{c}_1$$

$$\ln(xy) = \tilde{c}_1$$

לכן:

$$\boxed{c_1 = xy}$$

$$\boxed{P(x,y) = xy}$$

צריך להוסיף עוד משפחה של עקומים $Q(x,y)$ כך ש - $J \neq 0$:

$$J = \frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{vmatrix}$$

בדר"כ $Q(x,y)=x$ או $Q(x,y)=y$, נבחר $\boxed{Q(x,y)=x}$, ואכן:

$$J=\begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-x\neq 0$$

נבצע החלפת משתנים $u(x,y)\to u(P,Q)$:

$$u_x=u_P\cdot P_x+u_Q\cdot Q_x=u_P\cdot y+u_Q\cdot 1$$

$$u_y=u_P\cdot P_y+u_Q\cdot Q_y=u_P\cdot x+u_Q\cdot 0=u_P\cdot x$$

נחשב נגזרות שניות:

$$u_{xy}=u_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u_y\right)=\frac{\partial(u_P\cdot x)}{\partial x}=\frac{\partial u_P}{\partial x}+u_P$$

עזר:

$$\frac{\partial u_P}{\partial x}=u_{PP}\cdot P_x+u_{PQ}\cdot Q_x=u_{PP}\cdot y+u_{PQ}\cdot 1$$

ולכן:

$$\boxed{u_{xy}=u_{yx}=\left(u_{PP}\cdot y+u_{PQ}\right)x+u_P}$$

ושוב:

$$\boxed{u_{xx}}=\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial\left(u_P\cdot y+u_Q\right)}{\partial x}=\frac{\partial(u_P\cdot y)}{\partial x}+\frac{\partial\left(u_Q\right)}{\partial x}=y\cdot\frac{\partial(u_P)}{\partial x}+\frac{\partial\left(u_Q\right)}{\partial x}$$
$$=y\left(u_{PP}\cdot y+u_{PQ}\right)+u_{QP}\cdot\underbrace{P_x}_{=y}+u_{QQ}\cdot\underbrace{Q_x}_{=1}=\boxed{y^2u_{PP}+2yu_{PQ}+u_{QQ}}$$

$$\boxed{u_{yy}}=\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{\partial(u_P\cdot x)}{\partial y}=x\cdot\frac{\partial(u_P)}{\partial y}=x\left(u_{PP}\cdot\underbrace{P_y}_{=x}+u_{PQ}\cdot\underbrace{Q_y}_{=0}\right)=\boxed{x^2u_{PP}}$$

נציב במשוואה שלנו ונקבל:

$$x^2\left[y^2u_{PP}+2yu_{PQ}+u_{QQ}\right]-2xy\left[u_{PP}\cdot xy+u_{PQ}\cdot x+u_P\right]+y^2[x^2u_{PP}]$$
$$+x[u_P\cdot x]=xy^2$$

$$\Downarrow$$

$$u_{PP}\underbrace{[x^2y^2-2x^2y^2+x^2y^2]}_{=0}+u_{PQ}\underbrace{[2x^2y-2x^2y]}_{=0}+u_{QQ}[x^2]+u_P[x^2-2xy]$$
$$=xy^2$$

$$\Downarrow$$

$$x^2u_{QQ}+(x^2-2xy)u_P=xy^2$$

$$\Downarrow$$

$$x^2u_{QQ}=xy^2-(x^2-2xy)u_P$$

נחלק ב - x^2 ונקבל:

$$\boxed{u_{QQ}=\frac{y^2}{x}-\left(1-\frac{2y}{x}\right)u_P}$$

נציב $P=xy \;\; Q=x$ ונקבל צורה קנונית:

$$u_{QQ}=\frac{\left(\frac{P}{Q}\right)^2}{Q}-\left(1-\frac{2\cdot\frac{P}{Q}}{Q}\right)u_P=\frac{P^2}{Q^3}-\left(1-\frac{2P}{Q^2}\right)u_P$$

■

<u>תרגיל:</u>

$$y\cdot u_{xx}+u_{yy}=0$$

א) מיין.

ב) הבא לצורה קנונית.

<u>פתרון:</u>

א) המקדמים הינם:

$$a=y\,,2b=0\,,c=1$$

לכן:

$$\Delta=b^2-ac=0-y=-y$$

לכן נצטרך לחלק למקרים:

$y<0 \Leftarrow \Delta>0$ ולכן המד"ח היפרבולית.

$y=0 \Leftarrow \Delta=0$ ולכן המד"ח פרבולית (במקרה זה המד"ח כבר קנונית אז אין מה לגעת במקרה זה).

$y>0 \Leftarrow \Delta<0$ ולכן המד"ח אליפטית.

<u>מקרה א':</u> $y<0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{0\pm\sqrt{-y}}{y}=\frac{\pm\sqrt{-y}}{-(-y)}=\mp(-y)^{-0.5}$$

לכן:

$$(1)\;\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{(-y)^{0.5}}\Rightarrow\int(-y)^{0.5}dy=\int -1\,dx\Rightarrow-\frac{2}{3}(-y)^{1.5}=-x+\tilde{c}_1$$

$$\Rightarrow\boxed{-\frac{2}{3}(-y)^{1.5}+x=\tilde{c}_1}\Rightarrow\boxed{\frac{2}{3}(-y)^{1.5}-x=c_1=P}$$

$$(2)\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{(-y)^{0.5}}\Rightarrow\int(-y)^{0.5}dy=\int 1\,dx\Rightarrow-\frac{2}{3}(-y)^{1.5}=x+\tilde{c}_2$$
$$\Rightarrow\boxed{-\frac{2}{3}(-y)^{1.5}-x=\tilde{c}_2}\Rightarrow\boxed{\frac{2}{3}(-y)^{1.5}+x=c_2=P}$$

נסתכל על היעקוביאן:

$$J=\frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}P_x & Q_x\\ P_y & Q_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ (-y)^{0.5} & (-y)^{0.5}\end{vmatrix}=2(-y)^{0.5}\neq 0$$

נחשב נגזרות של u:

$$u_x=u_P\cdot P_x+u_Q\cdot Q_x=u_P\cdot(-1)+u_Q\cdot 1=u_Q-u_P$$

$$u_{xx}=\left(u_{QQ}\cdot Q_x+u_{PQ}\cdot P_x\right)-\left(u_{PQ}\cdot Q_x+u_{PP}\cdot P_x\right)=u_{QQ}\cdot 1-u_{PQ}-u_{PQ}+u_{PP}$$
$$=u_{PP}-2u_{PQ}+u_{QQ}$$

$$u_y=u_P\cdot P_y+u_Q\cdot Q_y=u_P\cdot(-y)^{0.5}+u_Q\cdot(-y)^{0.5}=(-y)^{0.5}\left(u_P+u_Q\right)$$

$$u_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{\partial\left((-y)^{0.5}\left(u_P+u_Q\right)\right)}{\partial y}$$
$$=-\frac{1}{2}(-y)^{0.5}\left(u_P+u_Q\right)+(-y)^{0.5}\frac{\partial\left(u_P+u_Q\right)}{\partial y}$$

עזר:

$$\frac{\partial\left(u_P+u_Q\right)}{\partial y}=\frac{\partial(u_P)}{\partial y}+\frac{\partial(u_Q)}{\partial y}=\left(u_{PP}\cdot P_y+u_{PQ}\cdot Q_y\right)+\left(u_{QP}\cdot P_y+u_{QQ}\cdot Q_y\right)$$
$$=(-y)^{0.5}\left[u_{PP}+2u_{PQ}+u_{QQ}\right]$$

לכן:

$$u_{yy}=-\frac{1}{2}(-y)^{0.5}\left(u_P+u_Q\right)-y\left[u_{PP}+2u_{PQ}+u_{QQ}\right]$$

נציב במד"ח:

$$y\left[u_{PP}-2u_{PQ}+u_{QQ}\right]-\frac{1}{2}(-y)^{0.5}\left(u_P+u_Q\right)-y\left[u_{PP}+2u_{PQ}+u_{QQ}\right]=0$$

$$\Downarrow$$

$$u_{PP}[y-y]+u_{PQ}[-2y-2y]+u_{QQ}[y-y]-\frac{1}{2}(-y)^{0.5}\left(u_P+u_Q\right)=0$$

$$\Downarrow$$

$$-4yu_{PQ}=\frac{1}{2}(-y)^{0.5}\left(u_P+u_Q\right)$$

$$\Downarrow$$

$$u_{PQ} = \frac{1}{8}[-y]^{1.5}(u_P + u_Q)$$

ניזכר כי:

$$P = \frac{2}{3}(-y)^{1.5} + x$$

$$Q = \frac{2}{3}(-y)^{1.5} - x$$

נחבר –

$$P + Q = \frac{4}{3}(-y)^{1.5}$$

$$\frac{3}{4}(P + Q) = (-y)^{1.5}$$

$$(-y)^{-1.5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{P + Q}$$

ולכן:

$$\boxed{u_{PQ}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{P + Q} \cdot (u_P + u_Q) = \boxed{\frac{1}{6(P + Q)}(u_P + u_Q)}$$

סיימנו את המקרה ההיפרבולי.

<u>מקרה ב':</u> $y > 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm \sqrt{-y}}{y} = \frac{\pm i\sqrt{y}}{y} = \pm \frac{i}{\sqrt{y}}$$

נסתכל רק על (כי יש פה 2 מספרים מרוכבים צמודים ומספיק להסתכל רק על אחד):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i}{\sqrt{y}}$$

$$\int \sqrt{y}\, dy = \int i\, dx$$

$$\frac{2}{3}y^{1.5} = ix + c_1$$

$$\frac{2}{3}y^{1.5} - ix = c_1$$

נבחר –

$$P = Re(c_1)\,, Q = Im(c_1)$$

$$P = \frac{2}{3}y^{1.5}\,, Q = -x$$

נבדוק את היעקוביאן:

$$J = \frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ y^{0.5} & 0 \end{vmatrix} = y^{0.5} \neq 0$$

נחשב נגזרות:

$$u_x = u_P \cdot P_x + u_Q \cdot Q_x = u_P \cdot 0 - u_Q = -u_Q$$

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_Q}{\partial x} = -\left[u_{QP} \cdot P_x + u_{QQ} \cdot Q_x\right] = u_{QQ}$$

$$u_y = u_P \cdot P_y + u_Q \cdot Q_y = y^{0.5} \cdot u_P$$

$$u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial(y^{0.5} \cdot u_P)}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot y^{-0.5} \cdot u_P + y^{0.5}\left(u_{PP} \cdot P_y + u_{PQ} \cdot Q_y\right)$$
$$= \frac{1}{2} y^{-0.5} u_P + y u_{PP}$$

נציב במד"ח:

$$y u_{QQ} + \frac{1}{2} y^{-0.5} u_P + y u_{PP} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y\left(u_{QQ} + u_{PP}\right) = -\frac{1}{2} y^{-0.5} u_P$$

$$u_{QQ} + u_{PP} = -\frac{1}{2} y^{-1.5} u_P$$

ניזכר כי:

$$P = \frac{2}{3} y^{1.5}$$

$$\frac{1}{P} = \frac{3}{2} y^{-1.5}$$

$$\frac{1}{3P} = \frac{1}{2} y^{-1.5}$$

נציב ונקבל:

$$u_{PP} + u_{QQ} = -\frac{1}{3P} \cdot u_P$$

וסיימנו.

■

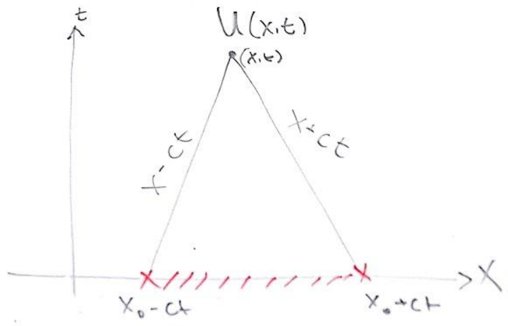
משוואת גלים על מיתר אינסופי – פתרון ע"י שיטת דלאמבר

משוואת הגלים:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) = g(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

$c > 0$ – מתיחות המיתר.

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$



תחום השפעה.

משפט: אם $f \in C^2(\infty)$ ו - $g \in C^1(\infty)$, אזי $u \in C^2(\infty)$, u פתרון קלאסי.

דוגמה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x,0) = \sin(x) = f(x) \\ u_t(x,0) = x = g(x) \end{cases}$$

אכן $c = 1$, אז נציב בנוסחת דלאמבר:

$$u(x,t) = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} s\,ds = \frac{\sin(x+t) + \sin(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{s^2}{2}\right]_{x-t}^{x+t}$$
$$= \frac{2\sin x \cos t}{2} + \frac{1}{4}[(x+t+x-t)(x+t-x+t)]$$
$$= \sin x \cos t + xt$$