

## תרגיל 5

להגשה עד 21.12.16

### שאלה 1

תהי  $m$  מידת לבג על הקטע  $[0, 1]$ . נניח כי לכל  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \subseteq [0, 1]$  הינה קבוצה מדידה לבג. תהי  $B$  קבוצת כל ה- $x$ ים המופיעים באינסוף קבוצות  $A_n$ . הוכיחו כי:

1.  $B$  מדידה לבג.
2. אם  $m(B) > 0$  אזי  $m(A_n) > \delta > 0$  לכל  $n$ , אזי  $m(B) > 0$ .
3. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$  אזי  $m(B) = 0$ .
4. תנו דוגמא למקרה בו  $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$  ו- $m(B) = 0$ .

### שאלה 2

נגדיר  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  באופן הבא:

$$F(x) := \begin{cases} 13 & x \geq 4 \\ 2(x+1) & 0 \leq x < 4 \\ e^x & x < 0 \end{cases}$$

1. חשבו את מידת סטילטיס ביחס ל  $F$  של הקבוצות הבאות:

(א)  $I_1 = (3, \infty)$

(ב)  $I_2 = (\frac{1}{4}, 2)$

(ג)  $I_3 = [-1, 0]$

2. הוכיחו כי תת קבוצה  $A \subseteq (-\infty, 0)$  הינה מדידה  $\mu_F$  אם היא מדידה לבג.

### תרגיל 3

יהיו  $X, Y$  מרחבים טופולוגיים. הוכיחו כי אם  $f: X \rightarrow Y$  רציפה אזי  $f$  פונקציה בורלית (כלומר, מדידה- $(\mathbb{B}(X), \mathbb{B}(Y))$ ).

### שאלה 4

יהי  $(X, \mathbb{A})$  מרחב מדיד, באשר  $\mathbb{A} = \mathbb{P}(X)$ . מהן הפונקציות  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  המדידות- $\mathbb{A}$ ?

### שאלה 5

יהי  $(X, \mathbb{A})$  מרחב מדיד, ולכל  $i \in \{1, 2, 3\}$  תהי פונקציה מדידה- $\mathbb{A}$ . לכל  $x \in X$ , נתבונן במשוואה:

$$g_x(t) := f_1(x)t^2 + f_2(x)t + f_3(x) = 0$$

זוהי למעשה משוואה ריבועית עם משתנה  $t$ . הוכיחו כי קבוצת כל ה- $x$ ים עבורם לפונקציה  $g_x$  יש שני שורשים שונים הינה מדידה- $\mathbb{A}$ , כלומר:

$$\{x \in X \mid \exists t_1, t_2 : t_1 \neq t_2 \text{ and } g_x(t_1) = g_x(t_2) = 0\} \in \mathbb{A}$$

### שאלה 6

יהי  $(X, \mathbb{A})$  מרחב מדיד, ויהיו  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות מדידות- $\mathbb{A}$ . הראו כי הפונקציה:

$$h(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \mathbf{1}_{[g \neq 0]}(x)$$

הינה מדידה- $\mathbb{A}$ .

### שאלה 7

יהיו  $(X, \mathbb{A})$  מרחב מדיד, ו- $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . הוכיחו או הפריכו:

1. אם  $|f|$  מדידה אזי  $f$  מדידה.

2. אם  $f^3$  מדידה אזי  $f$  מדידה.

**בהנאה (:**