דף תרגילים 4

תרגיל 1 מיצאו פרמטריזציה $\gamma(t)$ לקטע הקו הישר המתחיל בנקודה $(1,2)$ ומסתיים בנקודה $(3,4)$. מיצאו את הוקטור $\gamma'(t)$ ואת אורכו בכל נקודה.

פתרון 1

$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$\alpha(t) = (1-t)\cdot(1,2) + t\cdot(3,4) = (1+2t, 2+2t)$$

וקטור משיק הוא כמובן קבוע: $\alpha'(t) = ((1+2t)', (2+2t)') = (2,2)$ ואורכו $\sqrt{8}$.

תרגיל 2 מיצאו פרמטריזציה $\gamma(t)$ למעגל היחידה. מיצאו את הוקטור $\gamma'(t)$ בכל נקודה, והראו כי הוא תמיד מאונך לרדיוס וקטור $\gamma(t)$.

פתרון 2

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$
$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$
$$\gamma(t)\cdot\gamma'(t) = -\cos t \sin t + \cos t \sin t = 0$$

תרגיל 3 מיצאו פרמטריזציה עבור העקומות המוגדרות ע"י המשוואות הבאות:

א. האליפסה $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

ב. ההיפרבולה $y^2 - x^2 = 1$ [רמז: $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{cos^2 x}$.]

פתרון 3

א. $\alpha(t) = (2\cos t, 3\sin t)$

ב. $\alpha(t) = (\tan t, \frac{1}{\cos t})$

תרגיל 4 מיצאו משוואה סתומה $F(x,y) = 0$ עבור הפרמטריזציות של העקומות הבאות:

א. $\alpha(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$

ב. $\alpha(t) = (e^t, t^2)$

פתרון 4

א. מתקיים $\cos^2 t + sin^2 t = 1$ לכל t לכן $x + y = 1$, כלומר זהו בעצם קטע של קו ישר.

ב. $y = \log^2 x$

תרגיל 5 מיצאו את $\alpha'(t)$ עבור הפרמטריזציות $\alpha(t)$ מהתרגיל הקודם.

פתרון 5 נעבוד עם הפרמטריזציות:

א. $\alpha'(t) = (-2\cos t \sin t, 2\sin t \cos t) = (-\sin 2t, \sin 2t)$

ג. $\alpha'(t) = (e^t, 2t)$

תרגיל 6 יהיו $f(u^1,u^2) = (u^1)^3 + (u^2)^3$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin^2 t)$. חשבו את $\frac{d}{dt}|_{t=\frac{\pi}{2}}(f\circ\alpha)$ בשתי דרכים: ע"י כלל השרשרת, וע"י חישוב ישיר.

פתרון 6

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u^i}\frac{du^i}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u^1}\frac{du^1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt} = 3(\cos t)^2(-\sin t) + 3(\sin^2 t)^2 \cdot 2\cos t \sin t$$

לכן $\frac{d}{dt}|_{t=\frac{\pi}{2}}(f\circ\alpha) = 0$. מצד שני ע"י חישוב ישיר

$$f(\alpha(t)) = f(\cos t, \sin^2 t) = \cos^3 t + \sin^6 t$$

כלומר

$$(f(\alpha(t)))' = 3\cos^2 t(-\sin t) + 6\sin^5 t\cos t$$

כמובן אותו הפתרון כמו עם כלל השרשרת.

תרגיל 7 מיצאו וסווגו נקודות קריטיות של $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

פתרון 7 נקודה קריטית היא נקודה בה הגרדיאנט הוא 0:

$$f_x = 6x^2 + y^2 + 10x = 0$$
$$f_y = 2xy + 2y = 0$$

לכן נקודות קריטיות הן: $(0,0), (-1,-2), (-1,2), (-\frac{5}{3},0)$. נסווגן ע"י ההסיאן:

$$H_f = \begin{bmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{bmatrix}$$

נציב את הנקודות:

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

דטרמיננטה חיובית לכן קיצון. הע"ע חיוביים לכן $(0,0)$ נקודת מינימום מקומי.

$$H_f(-1,-2) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

דטרמיננטה שלילית לכן $(-1,-2)$ נקודת אוכף.

$$H_f(-1,2) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

דטרמיננטה שלילית לכן $(-1,2)$ נקודת אוכף.

$$H_f(-\frac{5}{3},0) = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

דטרמיננטה חיובית לכן קיצון. הע"ע שליליים לכן $(-\frac{5}{3},0)$ נקודת מקסימום מקומי.

תרגיל 8 עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, סווגו את הנקודה הקריטית הנתונה, כלומר קיבעו האם היא מינימום מקומי, מקסימום מקומי, או נקודת אוכף:

א. $f(x,y) = 3x^2 - xy + y^2$ בנקודה $p = (0,0)$.

ב. $f(x,y) = \sin x + y^3 + 3xy + 2x - 3y$ בנקודה $p = (0,-1)$.

פתרון 8

ג. $f_x = 6x - y, f_y = -x + 2y$ לכן אכן $(0,0)$ נקודה קריטית. לכן

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

דטמיננטה חיובית לכן קיצון מקומי. ערכים עצמיים $4 \pm \sqrt{5} > 0$ לכן זו נקודת מינימום מקומי.

ג. $f_x = \cos x + 3y + 2, f_y = 3y^2 + 3x - 3$ לכן אכן $(0,-1)$ נקודה קריטית. לכן

$$H_f(0,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

דטרמיננטה שלילית לכן אוכף.

תרגיל 9 הראו שאין נקודות במישור המקיימות את המשוואה $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 6y + 12.5 = 0$.

פתרון 9 לאחר לכסון אורתוגונאלי נקבל:

$$2x^2 + 4y^2 - 4\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 12.5 = 0$$

ולאחר השלמה לריבוע (ושינוי קואורדינטות) נקבל:

$$x^2 + 2y^2 + 4 = 0$$

לכן אוסף הפתרונות הוא קבוצה ריקה.

תרגיל 10 נתונה המשוואה הריבועית $4x^2 - 24xy - 6y^2 + 4x - 12y + 1 = 0$. הראו שהמשוואה מתארת שני ישרים נחתכים, מצאו את נקודת החיתוך ואת הזווית בין שני הישרים.

פתרון 10 לאחר לכסון אורתוגונאלי נקבל:

$$-14x^2 + 12y^2 - \frac{28\sqrt{13}}{13}x - \frac{36\sqrt{13}}{13}y + 1 = 0$$

לאחר השלמה לריבוע נקבל:

$$-14\left(x + \frac{\sqrt{13}}{13}\right)^2 + 12\left(y - \frac{3\sqrt{13}}{26}\right)^2 = 0$$

משוואה המתארת שני ישרים הנחתכים בנקודה $(-\frac{\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{26})$. נרצה למצוא איפה הנקודה הזו לפני סיבוב מערכת הצירים בשלב הלכסון: המטריצה המלכסנת שקיבלנו היתה $P = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} & \frac{-3\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} & \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix}$ לכן נקודת המרכז המקורית היא $(-\frac{\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{26})P^t = (-\frac{\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{26})\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} & \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ \frac{-3\sqrt{13}}{13} & \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix} = (-\frac{1}{2}, 0)$. כדי למצוא את הזווית ביניהם נעבוד לשם נוחות עם המשוואה לאחר שינוי קואורדינטות $-14x^2 + 12y^2 = 0$ כלומר הישרים בקואורדינטות אלה הם $y = \pm\sqrt{\frac{7}{6}}x$ והזווית החדה ביניהם היא בקירוב $\pi - (\arctan(\sqrt{\frac{7}{6}}) - \arctan(-\sqrt{\frac{7}{6}})) = 1.494 = 85.588°$.

תרגיל 11 תהי $(b_{ij}) \in M_{n,n}$ מוגדרת ע"י $b_{ij} = i^2 + 2j$. מיצאו את $b_{\{ij\}}$ ו־ $b_{[ij]}$.

פתרון 11

$b_{\{ij\}} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}) = \frac{1}{2}(i^2 + 2j + j^2 + 2i)$
$b_{[ij]} = \frac{1}{2}(b_{ij} - b_{ji}) = \frac{1}{2}(i^2 + 2j - j^2 - 2i)$