# הרצאה 7

## תת מרחבים

יהא $V$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. נאמר ש $w$ תת מרחב של $V$ אם:

1. $\phi \neq W \subseteq V$.
2. הקבוצה $W$ היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ביחס לפעולת החיבור $+_V$ של $V$, והכפל הסקלרי $\bullet_{\mathbb{F}V}$.

## משפט –קריטריון מקוצר

יהא $V$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. אם $W$ מקיים את התכונות הבאות:

1. $0_V \in W \subseteq V$.
2. לכל $w \in W$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha \bullet_{\mathbb{F}V} w \in W$.
3. לכל $u, w \in W$ מתקיים $u +_V w \in W$.

אז $W$ הוא תת מרחב של $V$.

## הוכחה

מכיוון ש $0_V \in W \subseteq V$ נקבל ש $\phi \neq W \subseteq V$, ולכן נשאר להראות שהקבוצה $W$ היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ביחס לפעולת החיבור $+_V$ של $V$, והכפל הסקלרי $\bullet_{\mathbb{F}V}$.

מכיוון שכל פעולות החיבור הם ביחס לפעולת החיבור $+_V$ נרשום את פעולת החיבור כ $+$.

מכיוון שהכפל הסקלרי הוא ביחס להגדרת הכפל הסקלרי של המרחב וקטורי $V$ ז"א $\bullet_{\mathbb{F}V}$ נרשום את פעולת הכפל הסקלרי כ $\bullet$.

נראה שכל התנאים בהגדרת מרחב וקטורי מתקיימים.

1. מוגדרות: נתון שלכל $u, w \in W$ מתקיים $u + w \in W$.
2. קיבוץ: יהיו $u, v, w \in W$ מכיוון ש $W \subseteq V$ נקבל ש $u, v, w \in V$ מכיוון ש $V$ מרחב וקטורי נקבל ש $(u+v)+w = u+(v+w)$.
3. חילוף: : יהיו $u, v \in W$ מכיוון ש $W \subseteq V$ נקבל ש $u, v \in V$ מכיוון ש $V$ מרחב וקטורי נקבל ש $u+v = v+u$.
4. איבר נייטרלי: יהי $u \in W$ מכיוון ש $W \subseteq V$ נקבל ש $u \in V$ נתון ש $0_V \in W$ מכיוון ש $V$ מרחב וקטורי ו $0_V$ הוא איבר נייטרלי לחיבור ב $V$ נקבל ש $u + 0_v = u$, ולכן $0_V$ הוא איבר נייטרלי לחיבור ב $W$.
5. איבר נגדי: יהי $u \in W$ מכיוון ש $W \subseteq V$ נקבל ש $u \in V$ מכיוון ש $V$ מרחב וקטורי נקבל ש $(-1) \bullet u = -(1 \bullet u) = -u$.

נתון ש לכל $w \in W$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha \bullet_{\mathbb{F}V} w \in W$, בפרט עבור $u \in W$, $\alpha = -1$ (כאשר $-1$ הוא איבר נגדי לאיבר היחידה בשדה $\mathbb{F}$ קיום האיבר $-1$ נובע מתכונות השדה).
$(-1) \bullet u \in W \Leftarrow -u \in W$.

6. תכונות הכפל הסקלרי:
   א. מוגדרות: נתון שלכל $w \in W$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha \bullet_{\mathbb{F}V} w \in W$.
   ב. קיבוץ: יהי $u \in W$ מכיוון ש $W \subseteq V$ נקבל ש $u \in V$ מכיוון ש $V$ מרחב וקטורי נקבל שלכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ מתקיים $(\alpha \bullet \beta) \bullet u = \alpha \bullet (\beta \bullet u)$.
   ג. כפל יחידה: יהי $u \in W$ מכיוון ש $W \subseteq V$ נקבל ש $u \in V$ מכיוון ש $V$ מרחב וקטורי נקבל ש $1 \bullet u = u$.
   ד. פילוג:

i. יהיו $u,v\in W$ מכיוון ש $W\subseteq V$ נקבל ש $u,v\in V$ מכיוון ש $V$ מרחב וקטורי נקבל שלכל $\alpha\in\mathbb{F}$ $\alpha\bullet(u+v)=\alpha\bullet u+\alpha\bullet v$.

ii. יהי $u\in W$ מכיוון ש $W\subseteq V$ נקבל ש $u\in V$ מכיוון ש $V$ מרחב וקטורי נקבל שלכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ $(\alpha+\beta)\bullet v=\alpha\bullet v+\beta\bullet v$.

**<u>תת-מרחבים טריוויאליים</u>**

אם $V$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ אז הקבוצות $W=\{0_v\}$ וכן $W=V$ הן תת-מרחבים של $V$.

נראה $W=\{0_v\}$ הוא תת-מרחב של $V$. יש להראות שכל תנאי המשפט הקודם מתקיימים:

1. $0_V\in\{0_V\}\subseteq V$.
2. $0_V+0_V=0_V\in\{0_V\}$.
3. לכל סקלר $\alpha$ נקבל ש $\alpha\bullet 0_V=0_V\in\{0_V\}$.

**<u>קריטריון מקוצר</u>**

יהא $V$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ונניח ש $W\subseteq V$ מקיימת:

1. $W\neq\phi$.
2. לכל $u,w\in W$ ו $\alpha\in\mathbb{F}$, $u+\alpha w\in W$.

אזי $W$ תת-מרחב של $V$.

**<u>הוכחה</u>**

יש להראות שכל תנאי המשפט הקודם מתקיימים.

1. נוכיח ש $0_V\in W$: נתון ש $W\neq\phi$, יהי $u\in W$. נתון שלכל $u,w\in W$ ו $\alpha\in\mathbb{F}$, $u+\alpha w\in W$ ובפרט $u+(-1)u\in W$. מכיוון ש $u\in W\subseteq V$ אז $u\in V$ ומכיוון ש $V$ מרחב ווקטורי נקבל ש $u+(-1)u=0_V$.
2. נתון שלכל $u,w\in W$ ו $\alpha\in\mathbb{F}$, $u+\alpha w\in W$ ובפרט עבור $\alpha=1$ מתקיים $u+1\bullet w\in W$. מכיוון ש $w\in W\subseteq V$ אז $w\in V$ ומכיוון ש $V$ מרחב ווקטורי נקבל ש $1\bullet w=w$.
3. נתון שלכל $u,w\in W$ ו $\alpha\in\mathbb{F}$, $u+\alpha w\in W$ ובפרט עבור $u=0$ מתקיים $0+\alpha\bullet w\in W$. מכיוון ש $w\in W\subseteq V$ אז $w\in V$ ומכיוון ש $V$ מרחב ווקטורי נקבל ש $0+\alpha\bullet w=\alpha\bullet w$.

**<u>מרחב האפס</u>**

עבור המטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, המרחב $\{v:Av=0\}$ נקרא מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$ או מרחב האפס.

**<u>הערה</u>**

מרחב האפס $N=\{v:Av=0\}$ כאשר $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ הוא תת מרחב של $\mathbb{F}^n$.

$A0=0$ ולכן $0\in N\Leftarrow \phi\neq N$.

יהיו $u,w\in N$ ו $\alpha\in\mathbb{F}$. $u,w\in N$ ולכן $Au=Aw=0$.

$A(u+\alpha w)=Au+A(\alpha w)=Au+\alpha Aw=0+\alpha 0=0 \Rightarrow u+\alpha w\in N$.

כל התנאים של הקריטריון המקוצר מתקיימים ולכן $N$ תת מרחב של $\mathbb{F}^n$.

**<u>דוגמא 1</u>**

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_1-R_2\to R_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $x_3$ הוא משתנה חופשי. נסמן $x_3=t \Leftarrow x_2=-t \Leftarrow x_1=-t$.
הפתרון הכללי של מערכת המשוואות הוא $t(-1,-1,1)$ סה"כ קיבלנו ש $\{(-1,-1,1)\}$ הוא בסיס למרחב האפס.

**__דוגמא 2__**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1-R_2\to R_2 \\ 2R_1-R_2\to R_3}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_2-R_3\to R_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שני משתנים חופשיים $x_2, x_4$.
נסמן $x_2=t, x_4=s \Leftarrow x_3=-s \Leftarrow x_1=-2t-s$ ואז הפתרון הכללי של מערכת המשוואות הוא $(-2t-s,t,-s,s)=t(-2,1,0,0)+s(-1,0,-1,1)$ והבסיס של מרחב האפס הוא $\{(-2,1,0,0),(-1,0,-1,1)\}$.

דרך נוספת למציאת בסיס:
המשתנים החופשיים הם $x_2, x_4$. נציב $x_2=0, x_4=1$ ונקבל $x_1=-1, x_3=-1$.
נציב $x_2=1, x_4=0$ ונקבל $x_1=-2, x_3=0$ ואז הבסיס הוא $\{(-2,1,0,0),(-1,0,-1,1)\}$.

**__הערה__**

יהי $N$ הפתרון הכללי של מערכת הומוגנית, ונניח שלצורה המדורגת של המערכת יש $s$ משתנים חופשיים. יהיו $u_1,u_2,...,u_s$ הפתרונות המתקבלים ע"י הצבת מספר אחד (או כל מספר שונה מאפס) באחד המשתנים החופשיים ואפס בשאר המשתנים החופשיים. אז $\dim N=s$ ו $u_1,u_2,...,u_s$ יוצרים בסיס של $N$.
נוכיח בהמשך את ההערה הנ"ל.

**__מערכת משוואות לא הומוגנית__**

אוסף הפתרונות של מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ $(b\neq 0)$ אינו מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F}$ מכיוון ש $A0=0\neq b$ ואז אפס לא נמצא בקבוצת הפתרונות של המערכת הלא הומוגנית.

**__משפט__**

יהי $v_0$ פתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית $Ax=b$ $(b\neq 0)$ ויהא $U$ הפתרון הכללי של מערכת אי-הומוגנית של משוואות ליניאריות. אזי $U=v_0+N=\{v_0+u \mid u\in N\}$.
כאשר $N$

**__הערה__**

שימו לב שלא בהכרח יש פתרון למערכת הלא הומוגנית. אנחנו מניחים במשפט שיש פתרון למערכת $Ax=b$.

**__הוכחה__**

נניח ש $v\in U$. מכיוון ש $v_0$ פתרון של המערכת הלא הומוגנית מתקיים $Av_0=b$. מכיוון ש $v\in U$ מתקיים $Av=b$. נסמן $u=v-v_0$ ואז $Au=A(v-v_0)=Av-Av_0=b-b=0$ ולכן $u\in N$.

$.v=v_0+(v-v_0)=v_0+u\in v_0+N$

נניח ש $v\in v_0+N$ ז"א קיים $u\in N$ כך ש $v=v_0+u$ ואז $.Av=A(v_0+u)=Av_0+Au=b+0=b$

סה"כ קיבלנו ש $.v\in U$

**<u>דוגמא 3</u>**

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&2&3\\2&3&5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\7\\17\end{pmatrix}$$

נשים לב ש $(1,1,1,1)$ הוא פתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית.

ראינו בדוגמא 2 ש $t(-2,1,0,0)+s(-1,0,-1,1)$ הוא פתרון כללי של המערכת הלא הומוגנית ולכן

$(1,1,1,1)+t(-2,1,0,0)+s(-1,0,-1,1)$ הוא פתרון כללי של המערכת הלא הומוגנית.

**<u>חיתוך של תת-מרחבים</u>**

**<u>משפט</u>**

יהיו $W,U$ תת-מרחבים של מרחב וקטורי $V$ אזי $U\cap W$ תת מרחב של $.V$

**<u>הוכחה</u>**

נוכיח שתנאי הקריטריון המקוצר מתקיימים.

מכיוון ש $U$ תת מרחב של $V$ נקבל ש $.0_v\in U\subseteq V$

מכיוון ש $W$ תת מרחב של $V$ נקבל ש $.0_v\in W\subseteq V$

סה"כ נקבל ש $.0_v\in U\cap W\subseteq V$

יהיו $u,w\in U\cap W$ ו $.\alpha\in\mathbb{F}$

מכיוון ש $u,w\in U\cap W$ אז $.u,w\in U$ $U$ תת מרחב של $V$, ולכן $.u+\alpha w\in U$

מכיוון ש $u,w\in U\cap W$ אז $.u,w\in W$ $W$ תת מרחב של $V$, ולכן $.u+\alpha w\in W$

סה"כ נקבל ש $.u+\alpha w\in U\cap W$

**<u>דוגמא</u>**

יהיו $U,V\subseteq\mathbb{R}^4$ המרחבים הבאים:

$$U=span\{(3,-1,6,-6),(1,1,2,0),(1,-1,2,-3)\}$$

$$V=span\{(1,0,1,0),(0,-2,0,3)\}$$

נמצא את הבסיס והמימד של $.U\cap V$

תחילה נמצא את הבסיס של $U$. נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}3&-1&6&-6\\1&1&2&0\\1&-1&2&-3\end{pmatrix}\underset{\substack{R_1-3R_2\to R_2\\R_1-3R_3\to R_3}}{\approx}\begin{pmatrix}3&-1&6&-6\\0&-4&0&-6\\0&2&0&3\end{pmatrix}\underset{R_2+2R_3\to R_3}{\approx}\begin{pmatrix}3&-1&6&-6\\0&-4&0&-6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$U=span\{(3,-1,6,-6),(0,2,0,3)\}$$

$$V=span\{(1,0,1,0),(1,1,2,0)\}$$

יש למצוא סקלרים $a_1,a_2,a_3,a_4$ כך ש $a_1(3,-1,6,-6)+a_2(0,2,0,3)=a_3(1,0,1,0)+a_4(1,1,2,0)$

נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1+3R_2\to R_2 \\ 2R_1-R_3\to R_3 \\ 2R_1+R_4\to R_4}}{\approx} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{R_2-2R_4\to R_4}{\approx} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_3-R_4\to R_4}{\approx} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המשתנה החופשי הוא $a_4$ עבור $a_4=9$ נקבל $a_3=0, a_2=6, a_1=3$

הווקטור $3\cdot(3,-1,6,-6)+6\cdot(0,2,0,3)=(9,9,18,0)$ נמצא בשני המרחבים ואז $U\cap V=span\{(1,1,2,0)\}$.

**<u>הערה</u>**

אם $W,U$ תת-מרחבים של מרחב וקטורי $V$ אזי לא בהכרח ש $U\cup W$ תת מרחב של $V$.

**<u>דוגמא</u>**

$U=span\{(1,0)\}, W=span\{(0,1)\}$.

$(0,1),(1,0)\in U\cup W$ אבל $(0,1)+(1,0)=(1,1)\notin U\cup W$.

**<u>תרגיל</u>**

יהיו $U,W$ תת מרחבים של $V$. הוכח שכל תת מרחב של $V$ שמוכל ב $U\cup W$ מוכל כולו או ב $U$ או ב $W$.

**<u>פתרון</u>**

אם $U\subseteq W$ אז $U\cup W=W$. במקרה כזה תת מרחב שמוכל ב $U\cup W$ מוכל בהכרח ב $W$.

אם $W\subseteq U$ נקבל שאם תת- מרחב מוכל כולו ב $U\cup W$ מוכל בהכרח ב $U$.

נניח ש $U\not\subset W \wedge W\not\subset U$.

נניח בשלילה שקיים $Y$ מרחב וקטורי שמוכל ב $U\cup W$ אך לא מוכל כולו ב $U$ ולא מוכל כולו ב $W$.

מכיוון ש $Y\not\subset W$ נקבל ש $Y\setminus W\neq\phi$. נסמן $y_1\in Y\setminus W$ מכיוון ש $Y\subseteq U\cup W$ נקבל ש $y_1\in U$ ז"א $y_1\in Y\cap U$. $Y,U$ תת מרחבים ואז $Y\cap U$ תת מרחב, ולכן קיים איבר נגדי ל $y_1$ ב $Y\cap U$ ז"א $-y_1\in Y\cap U$.

מכיוון ש $Y\not\subset U$ נקבל ש $Y\setminus U\neq\phi$. נסמן $y_2\in Y\setminus U$ מכיוון ש $Y\subseteq U\cup W$ נקבל ש $y_2\in W$ ז"א $y_2\in Y\cap W$. $Y,W$ תת מרחבים ואז $Y\cap W$ תת מרחב, ולכן קיים איבר נגדי ל $y_2$ ב $Y\cap W$ ז"א $-y_2\in Y\cap W$.

$y_1,y_2\in Y$ ומכיוון ש $Y$ תת מרחב נקבל ש $y_1+y_2\in Y$.

נתון ש $Y\subseteq U\cup W$ ולכן $y_1+y_2\in U\cup W$.

אם $y_1+y_2\in U$ אז מכיוון ש $y_1+y_2\in Y$ נקבל ש $y_1+y_2\in Y\cap U$.

ראינו ש $-y_1\in Y\cap U$ ובנוסף $Y\cap U$ תת-מרחב, ולכן $y_2=(y_1+y_2)+(-y_1)\in Y\cap U$ בסתירה לכך ש $y_2\in Y\setminus U$.

אם $y_1+y_2\in W$ אז מכיוון ש $y_1+y_2\in Y$ נקבל ש $y_1+y_2\in Y\cap W$.

ראינו ש $-y_2 \in Y \cap W$ ובנוסף $Y \cap W$ תת-מרחב, ולכן $y_1 = (y_1 + y_2) + (-y_2) \in Y \cap W$ בסתירה לכך ש $y_1 \in Y \setminus W$.

**סכום של תת-מרחבים**

יהא $V$ מרחב וקטורי, ויהיו $U, W$ תת מרחבים של $V$. הסכום $U + W$ מוגד ע"י:
$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$.

**הערה**

מכיוון ש $U$ תת מרחב של $V$ אז $0 \in U$. אם $w \in W$ אז $w = 0 + w \in U + W$ וקיבלנו ש $W \subseteq U + W$.

באותו אופן ניתן להראות ש $U \subseteq U + W$.

**משפט**

יהא $V$ מרחב וקטורי, ויהיו $U, W$ תת מרחבים של $V$. אזי $U + W$ תת מרחב של $V$.

**הוכחה**

נוכיח שתנאי הקריטריון המקוצר מתקיימים.

יהי $v \in U + W$ ז"א קיים $u \in U, w \in W$ כך ש $v = u + w$. מכיוון ש $U, W \subseteq V$ נקבל ש $u, w \in V$ ומכיוון ש $V$ מרחב וקטורי נקבל ש $v = u + w \in V$ ז"א $U + W \subseteq V$.

מכיוון ש $U$ תת מרחב של $V$ נקבל ש $0_v \in U \subseteq V$.

מכיוון ש $W$ תת מרחב של $V$ נקבל ש $0_v \in W \subseteq V$.

סה"כ נקבל ש $0_V = 0_V + 0_V \in U + W \subseteq V$.

יהיו $v_1, v_2 \in U + W$ ו $\alpha \in \mathbb{F}$.

$v_1 \in U + W$ ז"א $v_1 = u_1 + w_1$ כאשר $u_1 \in U, w_1 \in W$.

$v_2 \in U + W$ ז"א $v_2 = u_2 + w_2$ כאשר $u_2 \in U, w_2 \in W$.

$v_1 + \alpha v_2 = u_1 + w_1 + \alpha(u_2 + w_2) = (u_1 + \alpha u_2) + (w_1 + \alpha w_2)$.

מכיוון ש $U$ תת-מרחב נקבל ש $u_1 + \alpha u_1 \in U$, מכיוון ש $W$ תת מרחב נקבל ש $w_1 + \alpha w_2 \in W$.

סה"כ נקבל ש $(u_1 + \alpha u_1) + (w_1 + \alpha w_2) \in U + W$.

**סכום ישר**

אם $U \cap W = \{0\}$, נאמר שהסכום $U + W$ הוא ישר ונכתוב $U \oplus W$.

**משפט**

הסכום $U + W$ הוא ישר $\Leftrightarrow$ לכל $v \in U + W$ יש הצגה יחידה בצורה $v = u + w$ כאשר $u \in U, w \in W$.

**הוכחה**

נניח שכל $v \in U + W$ יש הצגה יחידה בצורה $v = u + w$ כאשר $u \in U, w \in W$.

מספיק להוכיח ש $U \cap W = \{0\}$.

יהי $v \in U \cap W$ מצד אחד $v = 0 + v$ כאשר $0 \in U, v \in W$ מצד שני $v = v + 0$ כאשר $v \in U, 0 \in W$, מכיוון שישנה הצגה יחידה עבור $v$ נקבל ש $v = \{0\}$.

נניח שהסכום $U + W$ הוא ישר.

יהי $v \in U + W$ ז"א קיימים $u \in U, w \in W$ כך ש $v = u + w$ צריך להראות שסכום כזה הוא יחיד. נניח גם ש $v = u' + w'$ כאשר $u' \in U, w' \in W$ אזי $u + w = u' + w'$ וכך $u - u' = w' - w$.

מכיוון ש $u, u' \in U$ נקבל ש $u - u' \in U$ ומכיוון ש $w, w' \in W$ נקבל ש $w' - w \in W$.

הראינו ש $u-u'=w'-w$ ולכן $u-u',w'-w\in U\cap W$ נתון שהסכום $U+W$ הוא ישר ז"א $U\cap W=\{0\}$ ואז $u-u'=0, w'-w=0 \Leftarrow u=u', w'=w$.

**תרגיל**

יהיו $V=\{(a_1,a_2,...,a_n): a_1+a_2+...+a_n=0\}; U=\{(a_1,a_2,...,a_n): a_1=a_2=...=a_n\}$.

כך ש $(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$

תוכיחו בתרגיל בית ש $U,V$ תתי מרחבים של $\mathbb{R}^n$.

הוכח ש $\mathbb{R}^n=U\oplus V$.

**פתרון**

נוכיח תחילה ש $U\cap V=\{0\}$. נניח ש $x\in U\cap V$.

מכיוון ש $x\in U$ נקבל ש $x=(a_1,a_2,...,a_n)$ כאשר $a_1=a_2=...=a_n$ ז"א $x=(a_1,a_1,...,a_1)$.

מכיוון ש $x\in V$ נקבל ש $a_1+a_1+...+a_1=0 \Rightarrow na_1=0 \Rightarrow a_1=0$ ז"א $x=(0,0,...,0)$.

נשאר להוכיח ש $\mathbb{R}^n=U+V$.

יהי $(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_1}{n},\frac{\sum_{i=1}^n a_1}{n},...,\frac{\sum_{i=1}^n a_1}{n}\right)\in U.$$

$$\left(\frac{(n-1)a_1+a_2+...+a_n}{n},\frac{a_1+(n-1)a_2+...+a_n}{n},...,\frac{a_1+a_2+...+(n-1)a_n}{n}\right)\in V$$

הסכום

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_1}{n},\frac{\sum_{i=1}^n a_1}{n},...,\frac{\sum_{i=1}^n a_1}{n}\right)+\left(\frac{(n-1)a_1+a_2+...+a_n}{n},\frac{a_1+(n-1)a_2+...+a_n}{n},...,\frac{a_1+a_2+...+(n-1)a_n}{n}\right)$$

נותן $x=(a_1,a_2,...,a_n)$.

**משפט המימדים**

יהיו $U$ ו $W$ תת-מרחבים ממימד סופי של מרחב וקטורי $V$. אזי ל $U+W$ יש מימד סופי ו $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$.

**הוכחה**

נניח ש $\dim W=n, \dim U=m, \dim(U\cap W)=r$.

יהי $\{v_1,v_2,...,v_r\}$ בסיס של $U\cap W$ ז"א $\{v_1,v_2,...,v_r\}\subseteq U$ קבוצה בת"ל ולכן אפשר להשלימה לבסיס של $U$ $\{v_1,v_2,...,v_r,u_1,u_2,...,u_{m-r}\}$.

$\{v_1,v_2,...,v_r\}\subseteq W$ קבוצה בת"ל ולכן אפשר להשלימה לבסיס של $W$ $\{v_1,v_2,...,v_r,w_1,w_2,...,w_{n-r}\}$.

נסמן $B=\{v_1,v_2,...,v_r,u_1,u_2,...,u_{m-r},w_1,w_2,...,w_{n-r}\}$ נשים לב שיש $m+n-r$ איברים בקבוצה $B$.

נשאר להוכיח שהקבוצה $B$ הוא בסיס של $U+W$.

נראה ש $B$ פורש את $U+W$. יהי $v\in U+W$ ז"א $v=u+w$ כאשר $u\in U, w\in W$.

מכיוון ש $u\in U$ ו $\{v_1,v_2,...,v_r,u_1,u_2,...,u_{m-r}\}$ בסיס של $U$ נקבל ש
$u=a_1v_1+a_2v_2+...+a_rv_r+a_{r+1}u_1+a_{r+2}u_2+...+a_mu_{m-r}$.
מכיוון ש $w\in W$ ו $\{v_1,v_2,...,v_r,w_1,w_2,...,w_{n-r}\}$ בסיס של $W$ נקבל ש
$w=b_1v_1+b_2v_2+...+b_rv_r+b_{r+1}w_1+b_{r+2}w_2+...+b_nw_{n-r}$.

$$u+w=a_1v_1+a_2v_2+...+a_rv_r+a_{r+1}u_1+a_{r+2}u_2+...+a_mu_{m-r}+$$
$$b_1v_1+b_2v_2+...+b_rv_r+b_{r+1}w_1+b_{r+2}w_2+...+b_nw_{n-r}=$$
$$=(a_1+b_1)v_1+(a_2+b_2)v_2+...+(a_r+b_r)v_r+a_{r+1}u_1+a_{r+2}u_2+...+a_mu_{m-r}+b_{r+1}w_1+b_{r+2}w_2+...+b_nw_{n-r}$$

נוכיח ש $B$ בת"ל
יהי $a_1v_1+a_2v_2+...+a_rv_r+b_1u_1+b_2u_2+...+b_{m-r}u_{m-r}+c_1w_1+c_2w_2+...+c_{n-r}w_{n-r}=0$.
יש להוכיח שכל הסקלרים שווים לאפס.
נסמן $v=a_1v_1+a_2v_2+...+a_rv_r+b_1u_1+b_2u_2+...+b_{m-r}u_{m-r}$ ואז $v=-c_1w_1-c_2w_2-...-c_{n-r}w_{n-r}$.
מכיוון ש $\{v_1,v_2,...,v_r,u_1,u_2,...,u_{m-r}\}$ בסיס של $U$ נקבל ש $v\in U$, מכיוון ש
$\{v_1,v_2,...,v_r,w_1,w_2,...,w_{n-r}\}$ בסיס של $W$ נקבל ש $\{w_1,w_2,...,w_{n-r}\}\subseteq W$ ואז $v\in W$ סה"כ קיבלנו
ש $v\in U\cap W$.
מכיוון ש $\{v_1,v_2,...,v_r\}$ בסיס של $U\cap W$ קיימים סקלרים $d_1,d_2,...,d_r$ כך ש
$v=d_1v_1+d_2v_2+...+d_rv_r$ ראינו ש $v=-c_1w_1-c_2w_2-...-c_{n-r}w_{n-r}$, ולכן .

$$d_1v_1+d_2v_2+...+d_rv_r+c_1w_1+c_2w_2+...+c_{n-r}w_{n-r}=0\Leftarrow -c_1w_1-c_2w_2-...-c_{n-r}w_{n-r}=d_1v_1+d_2v_2+...+d_rv_r$$

$\{v_1,v_2,...,v_r,w_1,w_2,...,w_{n-r}\}$ הוא בסיס של $W$ ולכן בת"ל, ז"א $c_1=c_2=...=c_{n-r}=0$.
מכיוון ש $a_1v_1+a_2v_2+...+a_rv_r+b_1u_1+b_2u_2+...+b_{m-r}u_{m-r}+c_1w_1+c_2w_2+...+c_{n-r}w_{n-r}=0$
וראינו ש $c_1=c_2=...=c_{n-r}=0$ נקבל ש $a_1v_1+a_2v_2+...+a_rv_r+b_1u_1+b_2u_2+...+b_{m-r}u_{m-r}=0$.
$\{v_1,v_2,...,v_r,u_1,u_2,...,u_{m-r}\}$ הוא בסיס של $U$ ולכן בת"ל,ז"א
$a_1=a_2=...=a_r=b_1=b_2=...=b_{m-r}=0$.
קיבלנו שבהכרח כל הסקלרים הם אפסים, ולכן הקבוצה $B$ בת"ל.

**<u>תרגיל</u>**

יהא $V$ מרחב וקטורי ממימד 5, ויהיו $U,W$ תת-מרחבים ממימד 3,4 בהתאמה. מהן האפשרויות עבור $\dim(U\cap W)$? הוכח!

**<u>פתרון</u>**

מכיוון ש $U,W$ תת-מרחבים של $V$ נקבל ש $U+W$ תת מרחב של $V$ ז"א $\dim(U+W)\le\dim V=5$
על פי משפט המימדים $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$ סה"כ נקבל ש
$2\le\dim(U\cap W)\Leftarrow 3+4-\dim(U\cap W)\le 5$.
מכיוון ש $U\cap W$ תת מרחב של $U$ נקבל ש $U,W$ $\dim(U\cap W)\le\dim U=3$ סה"כ קיבלנו ש
$2\le\dim(U\cap W)\le 3$.