תרגיל להגשה 2 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית
88-373 סמסטר ב' תשפ"א

הוראות. כתבו באופן ברור שם ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור, או להקליד את הפתרונות.
יש להגיש את התרגיל דרך אתר הקורס במודל (במטלה הייעודית לכך), עד לתאריך 30.6.2021.
משקל כל סעיף 12 נקודות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100.

בהצלחה!

תרגיל 1. נגדיר שני משתנים מקריים על $[0,1]$:

$$X(\omega)=\omega^2,\qquad Y(\omega)=\begin{cases}88, & \omega\le\frac{1}{3}\\ \omega+1, & \frac{1}{3}<\omega<\frac{2}{3}\\ 373, & \omega\ge\frac{2}{3}\end{cases}.$$

חשבו את $\mathbb{E}[X\mid Y]$.

תרגיל 2. תהי $X_1,X_2,\dots$ סדרת משתנים מקריים אינטגרביליים. נסמן את הפילטרציה הטבעית המוגדרת על ידם $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,X_2,\dots)$. נניח כי קיים $0<a<1$ כך שלכל $n\ge 1$,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n]=aX_n+(1-a)X_{n-1}.$$

מצאו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ שעבורם $M_n=\alpha X_n+\beta X_{n-1}$ הוא מרטינגל ביחס לפילטרציה $\mathcal{F}_n$.

תרגיל 3. יהיו $X_0,X_1,\dots$ ממבתש"ה, ונגדיר

$$\tau=\inf\{n\in\mathbb{N}\mid X_n>X_0\}.$$

הוכיחו כי τ הוא זמן עצירה ביחס לפילטרציה הטבעית.

תרגיל 4. יהי S_n הילוך מקרי סימטרי על $\mathbb{Z}$ המתחיל ב-0, ויהיו $a,b>0$ שלמים. נסמן על ידי τ את הזמן הראשון שבו ההילוך מגיע לאחד מקצוות הקטע $[-a,b]$. חשבו את התוחלת של τ בהינתן שהגענו ל-b לפני $(-a)$.
(רמז: בהרצאה השתמשתם במרטינגלים S_n ו-S_n^2-n על מנת ללמוד את זמן העצירה הזה. כדאי להשתמש במרטינגל הבא בסדרה.)

תרגיל 5. ניזכר בכד של פוליה: בכד יש כדור אחד ירוק וכדור אחד כתום. בכל שלב מוציאים כדור אחד מן הכד, ומחזירים אותו יחד עם עוד כדור מאותו הצבע. נניח שמתחילים בשלב ה-0, ונסמן $G_0 = 1$, ו-G_n הוא כמות הכדורים לאחר n הוצאות. אז $M_n = \frac{G_n}{n+2}$ הוא מרטינגל[1] (אין צורך להוכיח שזהו מרטינגל.)

א. הוכיחו כי ההתפלגות של G_n היא אחידה על $\{1, \ldots, n+1\}$ לכל n.

ב. הוכיחו שהמרטינגל M_n מתכנס כמעט תמיד, ומצאו את הגבול שלו.

ג. יהי τ הזמן הראשון שבו מוציאים כדור ירוק. חשבו את $\mathbb{E}\left[\frac{1}{\tau+2}\right]$.

תרגיל 6. יהי $\{X_n\}$ תהליך המותאם לפילטרציה $\{\mathcal{F}_n\}$ כך שלכל n, $0 \leq X_n \leq 1$. נניח שקיימים $\alpha, \beta > 0$ עם $\alpha + \beta = 1$ המקיימים

$$P\left(X_{n+1} = \alpha + \beta X_n \mid \mathcal{F}_n\right) = X_n, \qquad P\left(X_{n+1} = \beta X_n \mid \mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n$$

לכל $n \in \mathbb{N}$.

א. הראו כי $P\left(\lim_{n\to\infty} X_n \in \{0,1\}\right) = 1$. (רמז: התכנסות מרטינגלים)

ב. הראו שאם $X_0 = \theta$ קבוע, אז $P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = 1\right) = \theta$.

[1] בתרגול ראינו את הדוגמה הזו עם הזזה של אינדקס אחד