

# שאלון סגור

בס"ד  
שאלון בחינה בקורס: משוואות דיפרנציאליות רגילות  
מספר הקורס: 83-115-01  
מרצה: דר' אלכסנדרה אגרנוביץ'  
מתרגלים: זהבית צבי, רואי אסרף  
סמסטר ב', מועד א': ח'תמוז, התשע"ו (14.07.2016)  
משך הבחינה: שלוש שעות

חומר עזר: 3 דפים חד-צדדיים של A4, מחשבון רגיל (אין להשתמש במחשבון גרפי)

ניקוד: במבחן אפשר לצבור 100 נקודות.

יש לפרט שלבי החישוב. נא לכתוב באופן ברור ומסודר. שאלה מבולגנת ולא מסודרת לא תוכל לזכות במלוא הנקודות.

יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. במידה ויופיעו 6 פתרונות, רק חמישה הראשונים ייבדקו.

## בהצלחה!

שאלה 1. (20 נקודות)

נתונה המשוואה

$$x^2 y' + 2xy = y^3, x > 0$$

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה;

ב. (4 נקודות) מצאו את הפתרון הפרטי של המשוואה הנ"ל המקיים את התנאי

$$y(1) = 1;$$

ג. האם משפט הקיום והיחידות מבטיח פתרון המקיים  $y(0) = 1$ ?

שאלה 2. (20 נקודות)

א. מצאו את הצורה הכללית בה יש לחפש פתרון פרטי למשוואה

$$y''' + 4y'' + 4y' = -4x + 2 - 3e^{-2x} \sin x + (5x + \sqrt{\pi})e^{-2x}$$

לפי שיטת המקדמים הלא ידועים (אין צורך למצוא את המקדמים עצמם);

ב. ידוע ש-  $y_1(x) = x$  ו-  $y_2(x) = \frac{1}{x}$  הם שני פתרונות בלתי תלויים של המשוואה

$$x^2 y'' + xy' - y = \frac{x^2}{x^2 + x^3}$$

מצאו פתרון כללי של המשוואה  $x^2 y'' + xy' - y = 0$ .

שאלה 3 . (20 נקודות)

א. פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = \ln x, x > 0$$

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C : \text{נוסחת עזר}$$

ב. בדקו שהפונקציות  $\cos x^2, \sin x^2$  הם פתרונות בת"ל של המשוואה

$xy'' - y' + 4x^3 y = 0$  ב-  $(-\infty, \infty)$ . חשבו וורונסקיאן שלהם והראו כי הוא מתאפס ב-

$x = 0$ . האם אין שתי עובדות אלה סותרות?

שאלה 4 . (20 נקודות)

א. הראו שנקודה  $x_0 = 0$  היא נקודה רגולרית של המשוואה  $y'' - x^2 y = 0$  ;

ב. מצאו פתרון של המשוואה המקיים את תנאי ההתחלה  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .

ניתן להסתפק בחישוב 4 מחוברים שונים מאפס בטור.

שאלה 5 . (20 נקודות)

פתרו את מערכת המשוואות הנתונה עם תנאי ההתחלה (אין להשתמש בהתמרת לפלס) :

$$\begin{cases} x'(t) - 3x(t) + 2y(t) = 0 \\ y'(t) - x(t) - y(t) = 0 \\ x(0) = 2, y(0) = 1 \end{cases}$$

שאלה 6 . (20 נקודות)

א. (5 נקודות) מצאו התמרת לפלס של  $u_\pi(t) \cdot e^{-2t} \cdot \cos t$

$$\cos(x - \pi) = -\cos x : \text{נוסחת עזר}$$

ב. פתרו את בעיית התחלה הבאה בעזרת התמרת לפלס :

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 2y' = \delta(t-2) \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1 \end{cases}$$

**Table of Laplace Transforms**

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. $e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. $\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	12. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
13. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	14. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
15. $t^n e^{at}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	16. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
17. $u_c(t) = u(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	18. $\delta(t-c)$	$e^{-cs}$
19. $u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$	20. $u_c(t) g(t)$	$e^{-cs} \mathcal{L}\{g(t+c)\}$
21. $e^{ct} f(t)$	$F(s-c)$	22. $t^n f(t), n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
23. $\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$	24. $\int_0^t f(v) dv$	$\frac{F(s)}{s}$
25. $\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$	26. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1-e^{-sT}}$
27. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		