מתמטיקה לכימאים תרגיל 3

עוזי חרוש ועולא אמארה

תרגיל. בדוק האם הטורים באים מתכנסים

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n+8}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה השני

$$a_n = \frac{4}{2^n+8} \sim \frac{1}{2^n} = b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{2^n+8}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 2^n}{2^n+8} = 4$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס כטור הנדסי עם מנה בין $1-$ל-1 לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2-4n+7}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה שני

$$a_n = \frac{1}{2n^2-4n+7} \sim \frac{1}{n^2} = b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n^2-4n+7}}{\frac{1}{n^2}} = 2$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}+4\sqrt{n}}$ (מבחן ההשוואה השני)

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה שני

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}+4\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n}+4\sqrt{n}}}{n^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{4}$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ מתבדר כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ עם $\alpha \leq 1$ לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{3^n}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון

$$a_n=\frac{\sin^2(n)}{3^n}\leq\frac{1}{3^n}=b_n$$

לכן לפי מבחן ההשוואה הראשון אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, ואכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ מתכנס כטור הנדסי עם מנה בין $1-$ל-1 לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(16+n^2)\sqrt{n-3}}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה שני

$$a_n=\frac{2n+1}{(16+n^2)\sqrt{n-3}}\sim\frac{n}{n^2\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{(16+n^2)\sqrt{n-3}}}{n^{\frac{3}{2}}}=2$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ עם $\alpha > 1$ לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{2n^3+4}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה השני

$$a_n=\frac{n-5}{2n^3+4}\sim\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}=b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n-5}{2n^3+4}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ עם $\alpha > 1$, לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{2n^{\frac{3}{2}}}$ (מבחן ההשוואה הראשון)

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון

$$a_n=\frac{\ln(n)}{2n^{\frac{3}{2}}}\le\frac{n^{\frac{1}{4}}}{2n^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2n^{\frac{5}{4}}}=b_n$$

לכן לפי מבחן ההשוואה הראשון אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, ואכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{5}{4}}}$ מתכנס כטור הנדסי עם מנה בין -1 ל-1 לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

8. $\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\frac{9}{25}+\frac{11}{36}+$ (מבחן ההשוואה השני)

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי השווה ל- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$. נשתמש במבחן ההשוואה שני

$$a_n=\frac{2n+1}{(n+1)^2}\sim\frac{1}{n}=b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}}=2$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ עם $\alpha \le 1$ לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(n)}$ (מבחן ההשוואה הראשון)

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון

$$b_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{\ln^2(n)} = a_n$$

לכן לפי מבחן ההשוואה הראשון אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר, ואכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר כטור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ עם $\alpha \leq 1$ לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^6(n)}{n^3}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון

$$a_n = \frac{\ln^6(n)}{n^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} = b_n$$

לכן לפי מבחן ההשוואה הראשון אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, ואכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס כטור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ עם $\alpha > 1$ לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n^3}}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון

$$a_n = \frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n^3}} \leq \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}} = b_n$$

לכן לפי מבחן ההשוואה הראשון אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, ואכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס כטור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ עם $\alpha > 1$ לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{5^n}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה השני

$$a_n = \frac{2n-1}{5^n} \sim \frac{n}{5^n} = b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{5^n}}{\frac{n}{5^n}} = 2$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, כדי לבדוק את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נשתמש במבחן דאלמבר

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}}=\frac{1}{5}<1$$

לכן לפי מבחן דאלמבר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. לכן, גם הטור המקורי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{5^n}$ מתכנס.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. בכדי לבדוק את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נשתמש במבחן דאלמבר, נבדוק את גבול המנה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)(n+2)}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\,(n+3)}{n\,(n+1)\,(n+2)}=0<1$$

לכן לפי מבחן דאלמבר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$ (מבחן דאלמבר)

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. בכדי לבדוק את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נשתמש במבחן דאלמבר, נבדוק את גבול המנה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{\sqrt{2}}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\sqrt{2}}}{2n^{\sqrt{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{2}}=\text{"}\frac{1}{2}\,(1)^{\sqrt{2}}\text{"}=\frac{1}{2}<1$$

לכן לפי מבחן דאלמבר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. בכדי לבדוק את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נשתמש במבחן דאלמבר, נבדוק את גבול המנה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{2^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n\,(n+1)}{(n+1)^{(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{2}{e}<1$$

לכן לפי מבחן דאלמבר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{2n+3}\right)^{n}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נבדוק את התנאי ההכרחי להתכנסות ונקבל ש-

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{2n+3}\right)^{n}=\text{"}\left(\frac{5}{2}\right)^{\infty}\text{"}=\infty\neq 0$$

לכן הטור מתבדר

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נבדוק את מבחן השורש של קושי

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0<1$$

לכן לפי קושי הטור מתכנס.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ (מבחן קושי)

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נבדוק את מבחן השורש של קושי

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3}=\frac{1}{3}<1$$

לכן לפי קושי הטור מתכנס.

19. הוכח ש- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ מתכנס עבור $\alpha>1$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נתבונן בפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^s}$ היא חיובית מונוטונית יורדת לכל sלכן לפי מבחן האינטגרל הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ מתכנס אם רק אם האינטגרל $\int\limits_1^{\infty}f(x)\,dx$ ואכן

$$\int\limits_1^{\infty}f(x)\,dx=\int\limits_1^{\infty}x^{-s}dx=\left[\frac{1}{-s+1}x^{-s+1}\right]_1^{\infty}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-s+1}x^{-s+1}-\frac{1}{-s+1}\right)=\begin{cases}\infty & s\leq 1\\ \frac{1}{s-1} & s>1\end{cases}$$

20. הוכח ש- $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha}(n)}$ מתכנס עבור $\alpha>1$(מבחן האינטגרל)

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נתבונן בפונקציה $f(x)=\frac{1}{x\ln^{\alpha}(x)}$ היא חיובית מונוטונית יורדת לכל sלכן לפי מבחן האינטגרל הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha}(n)}$ מתכנס אם רק אם האינטגרל $\int\limits_2^{\infty}f(x)\,dx$ ואכן

$$\int\limits_2^{\infty}f(x)\,dx=\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha}(x)}dx=\int\limits_{e^2}^{\infty}\frac{1}{t^{\alpha}}dt$$

ומהתרגיל הקודם האינטגרל מתכנס עבור $\alpha>1$

תרגיל. קבע האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או מתבדרים.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos(n^2)}{3^n}$ (מבחן ההשוואה הראשון)

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2^n \cos(n^2)}{3^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2^n}{3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ מתכנס כטור הנדסי עם מנה $\frac{2}{3}$ לכן לפי מבחן ההשוואה הראשון גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, לכן יש התכנסות בהחלט.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

כדי לבדוק התכנסות של הטור הנל נשתמש במבחן השורש של קושי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{-1}{n+1}\right)^n = e^{-1} < 1$$

לכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ מכאן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ מתכנס בהחלט.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

פתרון. נשים לב ש-

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right) \neq 0$$

כלומר הטור לא מקיים את התנאי האחראי להתכנסות טורים, לכן אינו מתכנס בהחלט ולא בתנאי

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^2+1)}$$

כדי לבדוק התכנסות של הטור הנל ראשית נעזר במבחן השוואה השני

$$a_n = \frac{1}{\ln\left(n^2+1\right)} \sim \frac{1}{\ln\left(n^2\right)} = b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(n^2+1)}}{\frac{1}{\ln(n^2)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n^2\right)}{\ln\left(n^2+1\right)} \overset{*}{=} 1$$

*בעזרת לופיטל:

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד,

כעת נבדוק את התכנסות הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ בעזרת מבחן ההשוואה הראשון

$$b_n = \frac{1}{\ln\left(n^2\right)} = \frac{1}{2\ln(n)} \geq \frac{1}{2n} = c_n$$

הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ מתבדר לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר וגם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

לסיכום הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}$ לא מתכנס בהחלט!.

נעבור לבדוק התכנסות בתנאי. הסדרה $\frac{1}{\ln(n^2+1)}$ היא מונוטונית יורדת המתכנסת ל-0 לכן לפי לייבניץ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}$ מתכנס, לכן יש התכנסות בתנאי.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (מבחן לייבניץ)

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ $|a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

הטור הנל מתבדר כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ עם $\alpha \leq 1$ לכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ לא מתכנס בהחלט! נשים לב ש- $b_n = \frac{1}{n}$ היא סדרה חיובית מונוטונית המתכנסת ל-0, לכן הטור לפי לייבניץ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ מתכנסת לכן יש התכנסות בתנאי

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} e^{\frac{1}{n}}$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ $|a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\ln(n)} e^{\frac{1}{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{\ln(n)}$$

בעזרת מבחן ההשוואה הראשון נקבל ש-

$$a_n \frac{e^{\frac{1}{n}}}{\ln(n)} \geq \frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{n} = b_n$$

הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר, מכאן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} e^{\frac{1}{n}}$ לא מתכנס בהחלט!.

נעבור לבדוק התכנסות בתנאי. הסדרה $\frac{e^{\frac{1}{n}}}{\ln(n)}$ היא מונוטונית יורדת המתכנסת ל-0 לכן לפי לייבניץ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} e^{\frac{1}{n}}$ מתכנס, לכן יש התכנסות בתנאי.

7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right)$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|$

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln n} \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right) \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right) > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$$

לכן בעזרת מבחן ההשוואה הראשון הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|$ מתבדר לכן אין התכנסות בהחלט.

נסמן $a_n = \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right)$ ו- $b_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$ אז הסדרות הללו מקיימות

- a_n מונוטונית יורדת
- a_n חסומה (היות והיא מתכנסת ל-1)
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ מתכנס בעזרת לייבניץ

לכן לפי מבחן אבל הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{(n+3)!}{3!n!3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$$

מבחן דלאמבר נקבל ש-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+4)!}{3!(n+1)!3^{n+1}}}{\frac{(n+3)!}{3!n!3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)}{(n+1)\,3} = \frac{1}{3} < 1$$

לכן בעזרת דלאמבר הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$ מתכנס מכאן שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$ מתכנס בהחלט.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\ln(n^2+1)} \cos\frac{1}{n}$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ $|a_n|$ החל מ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2\,(-1)^n}{\ln(n^2+1)} \cos\frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2}{\ln(n^2+1)} \cos\frac{1}{n} \right|$$

החל מ-n מסויים מתקיים $2\cos\frac{1}{n} > 1$, לכן $\left|\frac{2}{\ln(n^2+1)}\cos\frac{1}{n}\right| > \frac{1}{\ln(n^2+1)}$ ובסעיף 4 הראנו שהטור הזה מתבדר לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר, משמע הטור לא מתכנס בהחלט. נבדוק התכנסות בתנאי, נסמן $a_n = 2\cos\frac{1}{n}$ ב-$b_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}$ אז מתקיים

- a_n מונוטונית
- a_n חסומה (היות והיא מתכנסת ל-1)
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסת לפי סעיף 4.

לכן לפני אבל הטור מתכנס בתנאי.

10. $1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{2}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{2}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} \pm \ldots$ (מבחן דריכלה)

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ $|a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \to \infty$$

לכן בעזרת מבחן ההשוואה הראשון הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר לכן אין התכנסות בהחלט.

נסמן $a_n = \frac{1}{2n-1}$ ו-$b_n = 1, 1, -2, 1, 1, -2, 1, 1, -2$ אז הסדרות הללו מקיימות

- a_n מונוטונית
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\right| < 100$

לכן לפי מבחן דיריכלה הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ $|a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$$

לכן בעזרת מבחן ההשוואה הראשון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר לכן אין התכנסות בהחלט.

נסמן $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ ו- $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ אז הסדרות הללו מקיימות

- a_n מונוטונית
- a_n חסומה (היות והיא מתכנסת ל-e^2)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בעזרת לייבניץ

לכן לפי מבחן אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס

.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n - n^2}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי (החל מ-n מסויים הוא חיובי) לכן יש רק התכנסות/התבדרות. נשתמש במבחן ההשוואה השני

$$a_n = \frac{3^n}{5^n - n^2} \sim \frac{3^n}{5^n} = b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{5^n - n^2}}{\frac{3^n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{n^2}{5^n}} = 1$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד,
והטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס כטור הנדסי עם מנה בין -1 ל-1 לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

בהצלחה!!