תרגיל 11

1. הוכיחו באמצעות הגדרת הגבול במונחי ϵ- δ כי מתקיים:

(א) $\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x-3}=-5$

(ב) $\lim_{x\to 1}\frac{3x+1}{x}=4$

פתרון:

(א) יהי $\epsilon>0$.

נמצא מספר ממשי $\delta>0$ כך שלכל x יתקיים:

$$0<|x-2|<\delta \implies |\frac{2x+1}{x-3}+5|<\epsilon$$

<u>טיוטה:</u>

נתחיל מהסוף, וננסה לבודד את הגורם $|x-2|$.

$$\left|\frac{2x+1}{x-3}+5\right|=\left|\frac{2x+1+5x-15}{x-3}\right|=\frac{7|x-2|}{|x-3|}$$

כדי להיפטר מהגורם $x-3$ נחסום אותו.

אם $\delta\le\frac{1}{2}$, אז $|x-2|<\delta$ גורר $|x-2|<\frac{1}{2}$ כלומר $-\frac{1}{2}<x-2<\frac{1}{2}$ ולכן $-\frac{3}{2}<x-3<-\frac{1}{2}$ כלומר $-2<\frac{1}{x-3}<-\frac{2}{3}$ ולכן $\frac{1}{|x-3|}<2$

(שימו לב כי לא ניתן לקחת $\delta>1$, כיוון שאז $x=3$ מקיים $|x-2|<\delta$, אבל 3 לא בתחום ההגדרה של הפונקציה.)

נחזור לחישוב:

$$\left|\frac{2x+1}{x-3}+5\right|=\frac{7|x-2|}{|x-3|}<14\,|x-2|$$

נרצה שיתקיים כי $14\,|x-2|<\epsilon$ ולכן נבחר $\delta=\frac{\epsilon}{14}$.

הוכחה:

יהי $\epsilon>0$, נבחר $\delta=min\left\{\frac{\epsilon}{14},\frac{1}{2}\right\}$. ואז לכל x המקיים $|x-2|<\delta$ יתקיים כי:

$$\left|\frac{2x+1}{x-3}+5\right|=\left|\frac{2x+1+5x-15}{x-3}\right|=\frac{7|x-2|}{|x-3|}<14\,|x-2|<14\frac{\epsilon}{14}=\epsilon$$

כדרוש.

(ב) יהי $\epsilon>0$.

נמצא מספר ממשי $\delta>0$ כך שלכל x יתקיים:

$$0<|x-1|<\delta \implies |\frac{3x+1}{x}-4|<\epsilon$$

טיוטה:

נתחיל מהסוף, וננסה לבודד את הגורם $|x-1|$.

$$\left|\frac{3x+1}{x}-4\right|=\left|\frac{3x+1-4x}{x}\right|=\left|\frac{1-x}{x}\right|=\frac{|x-1|}{|x|}$$

כדי להיפטר מהגורם x נחסום אותו.

אם $\delta\leq\frac{1}{2}$, אז $|x-1|<\delta$ גורר $|x-1|<\frac{1}{2}$ כלומר $-\frac{1}{2}<x-1<\frac{1}{2}$ ולכן $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$ כלומר $\frac{2}{3}<\frac{1}{x}<2$ ולכן $\frac{1}{|x|}<2$

נחזור לחישוב:

$$\left|\frac{3x+1}{x}-4\right|=\frac{|x-1|}{|x|}<2\,|x-1|$$

נרצה שיתקיים כי $2\,|x-1|<\epsilon$ ולכן נבחר $\delta=\frac{\epsilon}{2}$.

הוכחה:

יהי $\epsilon>0$, נבחר $\delta=min\left\{\frac{\epsilon}{2},\frac{1}{2}\right\}$. ואז לכל x המקיים $|x-1|<\delta$ יתקיים כי:

$$\left|\frac{3x+1}{x}-4\right|=\left|\frac{3x+1-4x}{x}\right|=\left|\frac{1-x}{x}\right|=\frac{|x-1|}{|x|}<2\,|x-1|<2\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

כדרוש.

2. תהי $f(x)$ פונקציה חסומה, ותהי $g(x)$ פונקציה המקיימת

$$\lim_{x\to c}g\left(x\right)=0$$

הוכיחו:

$$\lim_{x\to c}f\left(x\right)g\left(x\right)=0$$

שימו לב כי זאת טענה שימושית, ולאחר שתוכיחו אותה, תוכלו להשתמש בה בתרגילים הבאים.

פתרון:

הוכחה:

נתון כי $f\left(x\right)$ פונקציה חסומה, כלומר: קיים $M\in\mathbb{R}$, כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $|f\left(x\right)|\leq M$ לכן בפרט, $\underset{0\neq\Delta x\approx0}{st}\left(f\left(c+\Delta x\right)\right)$ הוא מספר ממשי סופי (היכול להיות תלוי בערך של Δx) בנוסף,

$$\lim_{x\to c}g\left(x\right)=0\iff\underset{0\neq\Delta x\approx0}{st}\left(g\left(c+\Delta x\right)\right)=0$$

כלומר $g\left(c+\Delta x\right)$ הוא אינפי לכל $0\neq\Delta x\approx0$. לכן $g\left(c+\Delta x\right)f\left(c+\Delta x\right)$ הוא אינפי (אינפי כפול משמעותי) **לכל** $0\neq\Delta x\approx0$. כלומר

$$\underset{0\neq\Delta x\approx0}{st}\left(g\left(c+\Delta x\right)f\left(c+\Delta x\right)\right)=0\iff\lim_{x\to c}f\left(x\right)g\left(x\right)=0$$

3. תזכורת:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

הוכיחו כי:

(א)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

רמז: לופיטל.

(ב) לכל $a\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$$

פתרון:

(א)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim_{x\to-\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

כעת,

$$\lim_{x\to-\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1$$

ולכן הגבול המקורי הוא $e^1=e$ כדרוש.

(ב) ידוע כי $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, בנוסף לפי סעיף א' $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ כלומר, לכל H אינסופי (חיובי ושלילי) מתקיים

$$st\left(\left(1+\frac{1}{H}\right)^H\right)=e$$

יהי H מספר אינסופי כלשהו, אזי גם $\frac{H}{a}$ מספר אינסופי, ומתקיים לגביו:

$$st\left(\left(1+\frac{1}{\frac{H}{a}}\right)^{\frac{H}{a}}\right)=e$$

לכן

$$st\left(\left(1+\frac{a}{H}\right)^H\right)=st\left(\left(1+\frac{1}{\frac{H}{a}}\right)^H\right)=st\left[\left(\left(1+\frac{1}{\frac{H}{a}}\right)^{\frac{H}{a}}\right)\right]^a=e^a$$

כלומר

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$$

כדרוש.

4. חשבו את הגבולות הבאים:

(א)

$$\lim_{x\to0+}x\ln x$$

(ב)

$$\lim_{x\to 0+} \ln x \sin x$$

(ג)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x\ln x}$$

(ד)

$$\lim_{x\to 0^+} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

(ה)

$$\lim_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

(ו)

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2^{x+2}\arctan x}{3^x + 4^{x+e}}$$

(ז)

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\ln\left(x^2\right)}$$

(ח)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(\arcsin x))}{xe^x \cos x}$$

(ט)

$$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$$

פתרון:

(א)

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

(ב) דרך 1:

$$\lim_{x\to0+}\ln x\sin x=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to0+}\frac{\sin^2 x}{-x\cos x}=\left(\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to0+}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=1\cdot0=0$$

דרך 2:

$$\lim_{x\to0+}\ln x\sin x=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x\sin x}{x}\cdot x=\left(\lim_{x\to0+}x\ln x\right)\cdot\left(\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}\right)=0\cdot1=0$$

כאשר את $\lim_{x\to0+}x\ln x=0$ לפי סעיף א'.

(ג)

$$\lim_{x\to0+}\frac{\arccos x-\frac{\pi}{2}}{x\ln x}$$

לפי סעיף א', $x\ln x\to0$ כאשר $x\to0^+$, לכן זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to0+}\frac{\arccos x-\frac{\pi}{2}}{x\ln x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0+}\frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{1+\ln x}=0$$

(ד) הגבול לא קיים: יהי $0<\epsilon\approx0$ נראה כי הגבול תלוי בבחירת ϵ.

עבור $\epsilon=\frac{1}{2\pi N}>0$ כאשר N היפר־טבעי אינסופי נקבל

$$\cos\left(\frac{1}{\epsilon}\right)=\cos\left(2\pi N\right)=1$$

עבור $\epsilon=\frac{1}{2\pi N+\frac{\pi}{2}}>0$ כאשר N היפר־טבעי אינסופי נקבל

$$\cos\left(\frac{1}{\epsilon}\right)=\cos\left(2\pi N+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

ולכן הגבול לא קיים.

(ה)

$$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln(x)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$$

כעת,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

לכן הגבול המקורי הוא $e^0=1$.

(ו)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+2}\arctan x}{3^x+4^{x+e}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\left(\frac{2}{4}\right)^x\arctan x}{\left(\frac{3}{4}\right)^x+4^e\left(\frac{4}{4}\right)^x}=\frac{0}{4^e}=0$$

(ז)

$$\lim_{x\to0}\left(1+x\right)^{\ln\left(x^2\right)}=\lim_{x\to0}e^{\ln\left(x^2\right)\ln(1+x)}=e^{\lim_{x\to0}\ln\left(x^2\right)\ln(1+x)}$$

$$\lim_{x\to0}\ln\left(x^2\right)\ln\left(1+x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(x^2\right)}{\frac{1}{\ln(1+x)}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{-\frac{1}{1+x}}{\ln^2(1+x)}}=\lim_{x\to0}\frac{2\left(1+x\right)\ln^2\left(1+x\right)}{-x}$$

$$=\lim_{x\to0}-2\left(1+x\right)\lim_{x\to0}\frac{\ln^2\left(1+x\right)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}-2\frac{2\ln\left(1+x\right)}{1}=0$$

(ח)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos\left(\arcsin x\right)\right)}{xe^{x}\cos x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos(\arcsin x)}\left(-\sin\left(\arcsin x\right)\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}}{e^{x}\cos x+xe^{x}\cos x-xe^{x}\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{\cos(\arcsin x)}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}}{e^{x}\cos x+xe^{x}\cos x-xe^{x}\sin x}=\frac{0}{1}=0$$

(ט)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{2}+1}{x^{2}-1}\right)^{x^{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x^{2}+1}{x^{2}-1}-1\right)\right)^{x^{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x^{2}+1-x^{2}+1}{x^{2}-1}\right)\right)^{x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x^{2}-1}\right)^{x^{2}-1}\right)^{\frac{x^{2}}{x^{2}-1}}\overset{*}{=}\lim_{x\to\infty}\left(e^{2}\right)^{\frac{x^{2}}{x^{2}-1}}=e^{2}$$

(*) לפי 3 ב'.

5. תהי

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\sin^{2}x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

(א) מצאו את כל הנקודות בהן f רציפה.

(ב) מצאו את $f'\left(x\right)$ לכל הנקודות בהן f גזירה.

(ג) האם $f'\left(x\right)$ רציפה בתחום הגדרתה? אם לא, באילו נקודות היא לא רציפה, ומה סוג אי־הרציפות שם (סליקה/קפיצה/מין שני)?

פתרון:

(א) לכל $x\neq 0$ הפונקציה רציפה כהרכבה ומכפלה של פונקציות רציפות.

עבור $x=0$ נבדוק האם מתקיים

$$\lim_{x\to o}f\left(x\right)=f\left(0\right)=0$$

$$\lim_{x\to o}f\left(x\right)=\lim_{x\to o}\sin^{2}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\lim_{x\to o}\sin^{2}x=\sin^{2}\left(0\right)=0$ בגלל רציפות של $\sin$. $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ היא פונקציה חסומה, ולכן לפי שאלה 2 לעיל, הגבול $\lim_{x\to o}\sin^{2}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ שווה אפס.

כלומר, זה אכן מתקיים, ולכן הפונקציה רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$.

(ב) לכל $x\neq 0$ ניתן לגזור לפי הכללים:

$$f'\left(x\right)=2\sin x\cos x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\sin^{2}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)$$

עבור $x=0$ נבדוק האם הפונקציה גזירה לפי הגדרה.

יהי $0\neq\Delta x\approx 0$. נחשב

$$st\left(\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{\sin^2(\Delta x)\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)st\left(\sin\Delta x\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\right)=1\cdot 0$$

השיוויון האחרון נובע המגבול הידוע $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ ומכך שגבול של פונקציה חסומה בפונקציה שואפת לאפס הוא אפס.

לכן, הפונקציה f גזירה גם ב $x=0$ וערך הנגזרת הוא אפס. לסיכום:

$$f'(x)=\begin{cases}\sin 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\sin^2 x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

(ג) לכל $x\neq 0$ הפונקציה $f'(x)$ רציפה כסכום, מנה, מכפלה והרכבה של פונקציות רציפות.

עבור $x=0$ נבדוק האם מתקיים

$$\lim_{x\to o}f'(x)=f'(0)=0$$

נחשב גבולות חד צדדים:

$$\lim_{x\to o^+}f'(x)=\lim_{x\to o^+}\sin 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\sin^2 x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

נוכיח כי גבול זה לא קיים: זהו גבול של שני מחוברים :

הגבול של המחובר הראשון קיים

$$\lim_{x\to o^+}\sin 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

כפונקציה חסומה כפול שואפת לאפס.

הגבול של המחובר השני לא קיים:

זוהי מכפלה של גבול קיים

$$\lim_{x\to o^+}\left(-\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)=-1$$

כפול גבול לא קיים

$$\lim_{x\to o^+}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

כפי שראינו בתרגיל 4 ד', ולכן גבול המכפלה לא קיים.

לסיכום: זהו חיבור של גבול קיים וגבול לא קיים ולכן הגבול של הסכום לא קיים.

קיבלנו כי הגבול החד צדדי לא קיים ב $x=0$ ולכן, הפונקציה $f'(x)$ לא רציפה ב $x=0$ ואי־הרציפות היא מסוג שני.

הוכחה

כיון ששני גבולות אלו קיימים וסופיים, ניתן להשתמש בגבול של סכום והפרש ונקבל:

$$\lim_{x\to a}\Big[f(x)\pm g(x)\Big]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)=f(a)\pm g(a)$$

■